



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Noter i bølgehydraulik

Burcharth, Hans F.; Larsen, Torben

Publication date:
1991

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Burcharth, H. F., & Larsen, T. (1991). *Noter i bølgehydraulik*. (9 udg.) Aalborg Universitetscenter, Inst. for Vand, Jord og Miljøteknik, Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

NOTER I BØLGEHYDRAULIK

H.F. Burcharth & Torben Larsen

Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning

Aalborg Universitetscenter

Januar 1991 9. udgave

Forord

De følgende noter skal tjene som grundlag for undervisningen i bølgehydraulik ved Aalborg Universitetscenter.

Bølgehydraulikkursus omfatter kun ca. 8 forelæsninger, hvorfor der kun gives en oversigtsmæssig behandling af de vigtigste emner inden for disciplinen. Der er lagt mere vægt på, at læseren får en fysisk forståelse af bølgefænomenerne end af de tilhørende og i øvrigt tilnærmede matematiske teorier.

Indholdsfortegnelse

1.	Indledning	side 1-1
2.	Betegnelse og definitioner	side 2-1
3.	Nogle grundlæggende hydrodynamiske principper for ideale væsker	side 3-1
3.1	Kontinuitetsligningen	side 3-1
3.2	Bevægelsesligningerne	side 3-1
3.3	Laplaces ligning	side 3-2
3.4	Bernoullis ligning	side 3-3
4.	Teorien om regelmæssige fremadskridende bølger	side 4-1
4.1	Løsning af Laplaces ligning med tilhørende randbetingelser	side 4-1
4.2	Partikelhastighederne	side 4-3
4.3	Partikelbanerne	side 4-4
4.4	Trykvariationen	side 4-5
4.5	Bølgeenergi	side 4-6
4.6	Refleksion og stående bølger	side 4-7
4.7	Instabilitet i bølgeformen	side 4-9
4.8	Bølgeformens ændring med vanddybden	side 4-10
4.9	Refraktion	side 4-13
4.10	Diffraction	side 4-16
4.11	Hyperbolske funktioner	side 4-18
4.12	Bølgetabel	side 4-20
5.	Vindgenererede bølger	side 5-1
5.1	Bølgers opståen	side 5-1
5.2	Statistisk fordeling af bølgehøjder og perioder, variansspektret	side 5-2
6.	Bestemmelse af F_{m0} og T_m på en lokalitet ud fra vinddata	side 6-1
6.1	Dimensionsanalyse og bølgedannelse	side 6-1
6.2	Dybt vand	side 6-2
6.3	Vanddybde $d < \frac{L}{2}$	side 6-3
6.4	Vindhastigheden	side 6-5
7.	Litteratur	side 7-1

1. Indledning

Størstedelen af jorden er dækket af hav. Overalt, hvor den menneskelige aktivitet når kysterne, er det af betydning at kende de fænomener, som knytter sig til havets tilstedeværelse.

Ved planlægning af havne, kystsikringsværker og lignende, er det vandbygningsingeniørens ofte vanskelige men spændende opgave at klarlægge de påvirkninger og tilstande på og omkring konstruktionerne, som det ofte komplicerede samspil mellem bølger, strøm, vandstandsvariationer, bund- og kysttopografi, konstruktionsudformning m.v. fremkalder. Af traditionelle opgaver kan i den forbindelse nævnes undersøgelse af bølgepåvirkning på moler, bølgeuro i havnebassiner, manøvrerings- og tilsejlingsforhold ved havne, erosion og transport af kystmaterialer, o.s.v. Inden for det her antydede arbejdsområde spiller bølgeforholdene næsten altid en dominerende rolle.

I dette skrift vil vi alene beskæftige os med bølger i de kystnære områder, idet vi søger at skaffe erkendelse om bølgenes fysiske forhold med det formål at kunne præstere en matematisk behandling af bølgefænomenerne til hjælp for den praktiserende ingeniør. For ikke senere at skuffe læseren skal det allerede her fremhæves, at bølgehydraulikken som ren matematisk disciplin endnu kun kan give en meget forenklet og til tider derfor ubrugelig fremstilling af naturens bølger.

Bølgetyper

Man kan skelne mellem flere bølgetyper f.eks. ved deres dannelsesårsag eller ved deres periode (frekvens)

Bølgefænomen	Dannelsesårsag	Periode
Vindstuvning	Vindpåvirkning på vandoverfladen	1 - 30 dage
Tidevand	Månens og solens gravitation	12,3 og 24,6 timer
Barometrisk bølge	Ændring i barometertryk	1 - 20 timer
Tsunami	Jordskælv	5 - 60 min.
Seiching	Resonans	2 - 40 min.
Jordskredsbølge	Jord(klippe)skred	
Dønning	Vindgenererede bølger	<30 sek
Vindgenererede bølger	Vindpåvirkning på vandoverfladen	<15 sek
Stødtryk	Bølger der bryder mod flader	0,05 - 0,5 sek

I praksis opfattes fænomenerne i første gruppe ikke umiddelbart som bølger, men derimod som langsomme ændringer af vandspejlets beliggenhed. Sådanne bølgefænomener kaldes derfor vandstandsvariationer.

Vi vil i denne bølgehydraulik kun beskæftige os med den sidste gruppe som indeholder de for danske farvande væsentligste bølgefænomener.

Beskrivelse af bølger

Vanskeligheden ved at formulere en matematisk beskrivelse af vindgenererede bølger aner man, når man betragter en vindblæst havoverflade med dens meget uregelmæssigt bølgede udseende, hvor bølger tilsyneladende ustandselig opstår og forsvinder, hvor mindre krusninger og bølger overlejrer større bølger og hvor bølgerne vandrer med forskellig hastighed og tildels også med forskellig retning.

Fra et ingeniørmæssigt synspunkt er en meget detaljeret beskrivelse unødvendig, vi er tilfredse, hvis teorien gør det muligt at bestemme de ændringer i de større karakteristiske bølgeformer, som vi observerer i bølgemønsteret. Vi ser f.eks., at hovedformerne i bølgemønsteret vokser under vindpåvirkning, at bølgehøjden aftager men bølgelængden tiltager under dæmpning ved vindophør, at bølger bliver mere stejle for til sidst at bryde, når de løber ind på en skrånende kyst, at bølgefronter afbøjes og bølgehøjder aftager når bølger løber ind gennem en havnemunding (diffraktion), at bølgefronter på skrånende kyster drejer, således at de ved strandkanten næsten altid er parallelle med kystlinien, selv om dette ikke er tilfældet ude på dybt vand (refraktion).



Vindgenererede bølger



Regelmæssige (periodiske) bølger

fig. 1.-1

2. Betegnelser og definitioner

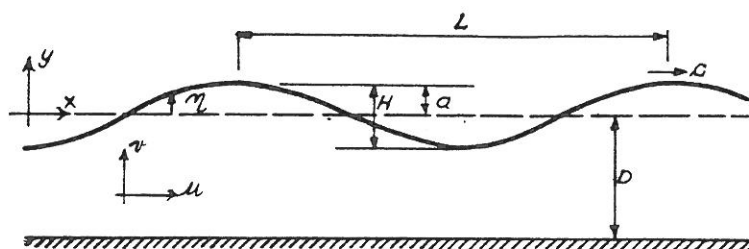


fig. 2.-1

- H Bølgehøjden.
- a Bølgeamplituden. Ved sinusformede bølger lig med $H/2$.
- η Ordinaten til overfladen.
- L Bølgelængden.
- H/L Bølgestejlheden.
- D Vanddybden svarende til roligt vandspejl.
- T Bølgeperioden, d.v.s. tiden mellem to på hinanden følgende bølgetoppe(dele)'s passage af samme faste vertikal.
- c Bølgéhastigheden, d.v.s. bølgeformens hastighed, $c = \frac{L}{T}$.
- c_g Gruppehastigheden, d.v.s. bølgeenergiens forplantnings-hastighed.
- u Partikelhastigheden i vandret retning.
- v Partikelhastigheden i lodret retning.
- ϕ Hastighedspotentialet.
- k Bølgetallet, $2\pi/L$.
- ω $\frac{2\pi}{T}$.

3. Nogle grundlæggende hydrodynamiske principper for ideale vædsker

Flere væsentlige bølgefænomener lader sig beskrive ved hjælp af teorien for ideale vædsker. Nedenstående resumeres et par grundlæggende principper, som vil blive anvendt i det følgende afsnit. Af praktiske grunde omtales kun plane strømninger.

3.1 Kontinuitetsligningen

En lille rektangulær kasse med sidelængderne dy og dx betragtes (længden vinkelret på tegningens plan antages at være 1.):

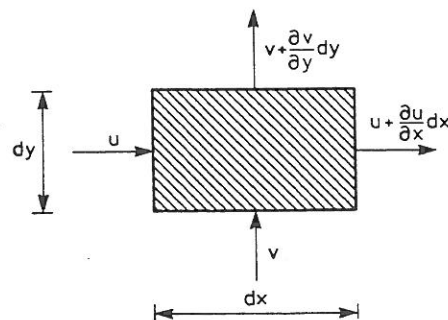


fig. 3.1-1

Antages vædsken at være usammentrykkelig følger umiddelbart, at der ikke kan opmagasineres vædske inden for kassen, hvilket kan udtrykkes således, at summen af det indstrømmende og udstrømmende volumen i tidsrummet dt er nul:

$$(u \, dy + v \, dx)dt - ((u + \frac{\partial u}{\partial x}dx)dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y}dy)dx)dt = 0$$

som reduceres til

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1-1)$$

3.2 Bevægelsesligningerne

Bevægelsesligningerne for en vædskepartikel er principielt Newtons 2. lov i de to projektioner, som her betragtes. Da vædsken antages at være ideal, vil en vædskepartikel kun være påvirket af tryk- og tyngdekræfter (udstrækning = 1 \perp plan).

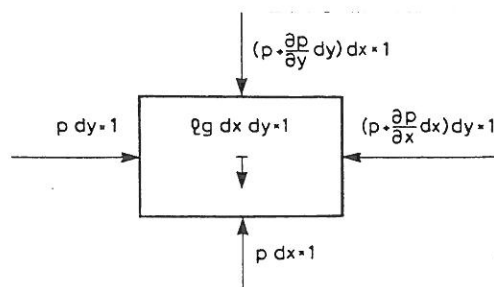


fig. 3.2-1

$$\text{Vandret projektion} \quad \rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2-1)$$

$$\text{Lodret projektion} \quad \rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \cdot g \quad (3.2-2)$$

Accelerationen med komposanterne $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ benævnes den substantielle acceleration, som ikke må forveksles med den lokale acceleration $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Beskrives hastighedsfeltet som funktion af stedet og tiden:

$$u = u(x, y, t)$$

$$v = v(x, y, t)$$

kan den substantielle acceleration skrives som

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2-3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.2-4)$$

3.3 Laplaces ligning

Principielt kan plane strømningsproblemer herefter løses ved anvendelse af kontinuitetsligningen og de to bevægelsesligninger. Imidlertid søges en simplere beskrivelse.

Differentieres de to bevægelsesligninger (3.2-1) og (3.2-2) med hensyn til henholdsvis y og x fås

$$\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) = - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) = - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$$

subtraheres fås

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) = 0$$

indsættes heri (3.2-3) og (3.2-4) fås efter elementære regninger

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.3-1)$$

Udtrykket $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ benævnes rotationen af hastighedsfeltet. Dette matematiske begreb er som bekendt to gange den negative værdi af den virkelige vinkelhastighed i det betragtede punkt.

Antages nu rotationen af hastighedsfeltet i alle punkter at være lig nul, vil ligning (3.3-1) altid være tilfredsstillet og dermed ligeså bevægelsesligningerne (3.2-1) og (3.2-2).

Bevægelsesligningerne er herefter reduceret til

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.3-2)$$

Den fysiske begrundelse for denne antagelse vil senere blive diskuteres.

Nu indføres en ny funktion hastighedspotentialet $\phi = \phi(x, y, t)$

$$u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{og} \quad (3.3-3)$$

$$v = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.3-4)$$

Denne funktion ses altid at tilfredsstille udtryk (3.3-2) og indsættes i kontinuitetsligningen (3.1-1) fås Laplaces ligning:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3-5)$$

Det oprindelige problem med tre partielle differentialligninger med tre ubekendte u , v og p er således reduceret til en ligning med en ubekendt ϕ .

3.4 Bernoullis (*) ligning

Opretholdes antagelsen om rotationen lig nul, kan hastighedspotentialet indføres i bevægelsesligningerne (3.2-1) og (3.2-2)

$$\rho \left(- \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4-1)$$

$$\rho \left(- \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \quad (3.4-2)$$

indføres heri

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \quad ,$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad \text{og} \quad g = \frac{d(gy)}{dy}$$

kan bevægelsesligningerne skrives

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3.4-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0 \quad (3.4-4)$$

Integreres disse to udtryk fås

$$- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} = F(y, t) \quad (3.4-5)$$

$$- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = G(x, t) \quad (3.4-6)$$

hvor F og G er arbitrære funktioner.

(*) Daniel Bernoulli [Bernu'jil], schweizisk fysiker, 1700-tallet

Subtraheres de to sidstnævnte udtryk fås

$$G(x,t) = gy + F(y,t)$$

Det ses heraf umiddelbart $G(x,t)$ kun kan være en funktion af t :
 $G(t)$ d.v.s.:

$F(y,t) = G(t) - gy$, som indsættes i (3.4-5) og man får Bernoullis
 ligning for en ikke stationær strømning

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = G(t) \quad (3.4-7)$$

I det stationære tilfælde fås den velkendte ligning

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = \text{konstant.} \quad (3.4-8)$$

4. Teorien for regelmæssige fremadskridende bølger

På grundlag af de i sidste afsnit angivne principper skal her angives teorien for regelmæssige fremadskridende bølger. Det skal her nævnes, at andre teorier eksisterer, men den her nævnte ofte tilnærmer de fysiske forhold på tilfredsstillende måde og desuden må anses for at være den mest anvendte verden over.

4.1 Løsning af Laplaces ligning med tilhørende randbetingelser

Det antages, at bølgebevægelsen lader sig beskrive som en løsning til Laplaces ligning

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1-1)$$

Randbetingelserne er følgende:

1. Ved bunden kan kun optræde vandrette partikelhastigheder eller

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y = -D \quad (4.1-2)$$

2. Ved overfladen er forholdene mere komplicerede.

Den geometriske betingelse kan formuleres således, at overfladens hastighed i lodret retning må være lig en sammesteds liggende vædskepartikels lodrette hastighedskomponent.

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \text{for } y = \eta \end{aligned}$$

Det konvektive led $-\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ eller $\frac{\partial \eta}{\partial x} u$ må være lille af 2. orden i forhold til de to øvrige led. Herefter reduceres udtrykket til

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{for } y = \eta \quad (4.1-3)$$

Endvidere må trykket langs overfladen være lig nul, hvilket kan formuleres ved anvendelse af Bernoullis udvidede ligning

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + 0 + gy = G(t)$$

I stor afstand fra overfladen vil bølgebevægelsen ikke mærkes og grænseværdien, når afstanden fra overfladen øges, vil være

$$u = v = 0 \quad \text{og} \quad \frac{p}{\rho} = gy \quad (\text{hydrostatisk trykfordeling}) \quad \text{derfor}$$

må ϕ her være konstant og herved ses, at $G(t)$ kan sættes lig nul. For overfladen fås:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy = 0 \quad \text{for } y = \eta \quad (4.1-4)$$

Herefter foretages endnu en tilnærmelse, idet det antages, at $(u^2 + v^2)$ i formel (4.1-4) er lille af 2. orden. Herved reduceres (4.1-4) til

$$y = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \text{for } y = \eta$$

Nu gøres den afsluttende tilnærmelse, idet det antages, at bølgerne er så små, at $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ikke varierer fra $y = \eta$ til $y = 0$ d.v.s.

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \text{for } y = 0 \quad (4.1-5)$$

Nu søges en løsning til Laplaces ligning (4.1-1) som er periodisk både i tid og sted med randbetingelserne (4.1-2), (4.1-3) og (4.1-5). Selve løsningsmetoden skal ikke angives her, men Bernoullis separationsmetode fører bl.a. til følgende løsning (se [5])

$$\phi = \frac{a c \cosh k(D + y)}{\sinh (kD)} \cos (kx - \omega t) \quad (4.1-6)$$

Overfladeformen bliver

$$\eta = a \sin (kx - \omega t) \quad (4.1-7)$$

Den arbitrære konstant a er det halve af bølgehøjden H . Konstanterne k og ω bestemmes af $k = \frac{2\pi}{L}$, hvor L er bølgelængden, og $\omega = \frac{2\pi}{T}$, hvor T er bølgeperioden.

Bølgehastigheden c bestemmes ved indsætning af udtrykkene (4.1-6) og (4.1-7) i formel (4.1-5) samt indførelse af $c = \frac{L}{T}$. Man finder

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi D}{L}\right)} \quad (4.1-8)$$

I grænsetilfældene reduceres formel (4.1-8) til følgende:

$$1) \text{ Lavt vand, d.v.s. } \frac{D}{L} < \frac{1}{20}$$

$$\tanh\left(\frac{2\pi D}{L}\right) \rightarrow \frac{2\pi D}{L} \quad \text{for } \frac{2\pi D}{L} \rightarrow 0$$

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot 2\pi D}{2\pi \cdot L}}$$

$$c = \sqrt{gD} \quad (4.1-9)$$

$$2) \text{ Dybt vand, d.v.s. } \frac{D}{L} > \frac{1}{4}$$

$$\tanh\left(\frac{2\pi D}{L}\right) \rightarrow 1 \quad \text{for } \frac{2\pi D}{L} \rightarrow \infty$$

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \quad (4.1-10)$$

Ovenstående teori kaldes ofte 1. ordens teorien, idet de nævnte tilnærmelser resulterer i, at overfladens ligning kan beskrives ved en simpel sinusfunktion. Den formelt korrekte løsning uden disse tilnærmelser vil kun kunne beskrives ved hjælp af en uendelig række af trigonometriske funktioner (Fourierrække). En bedre tilnærmelse til denne korrekte løsning er 2. ordens teorien, hvorefter overfladens ligning kan skrives på følgende måde:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + \frac{\pi a^2}{2L} \frac{\cosh kD}{\sinh^3 kD} (\cosh 2kD + 2) \cdot \cos 2(kx - \omega t) \quad (4.1-11)$$

Det ses heraf, at for små værdier af a vil sidste led være lille af 2. orden, og udtrykket vil nærme sig til det tilsvarende fra 1. ordens teorien.

Efter 2. ordens teorien findes samme udtryk for bølgehastigheden som ved 1. ordens teorien. For 3. og højere ordens teorier vil bølgehastigheden have en svag afhængighed af bølgehøjden.

Til belysning af bølgeformens afhængighed af bølgestejlheden, skal der vises tre forskellige bølger.

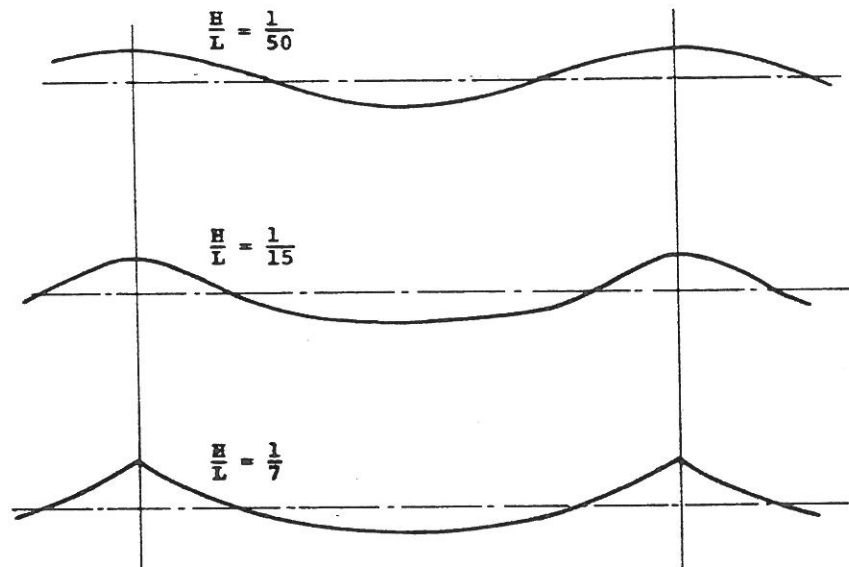


fig. 4.1-1, Bølgeformens afhængighed af bølgestejlheden, (højdemålestokken er fortegnet).

4.2 Partikelhastighederne

Efter 1. ordens teorien kan partikelhastighederne beregnes til

$$\text{Vandret} \quad u = \frac{1}{2} H c \frac{2\pi}{L} \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{L} (y+D)\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} D\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{L} (x-ct)\right) \quad (4.2-1)$$

$$\text{Lodret} \quad v = -\frac{1}{2} H c \frac{2\pi}{L} \frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} (y+D)\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} D\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{L} (x-ct)\right) \quad (4.2-2)$$

Idet $\frac{1}{2} H c \frac{2\pi}{L} = \frac{1}{2} H \frac{L}{T} \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi H}{T}$ fås de maksimale vandrette partikelhastigheder:

$$\text{I overfladen } (y = 0): \quad u_{\max} = \frac{\pi H}{T} \coth\left(\frac{2\pi}{L} D\right) \quad (4.2 - 3)$$

$$\text{Ved bunden } (y = -D): \quad u_{\max} = \frac{\pi H}{T} \frac{1}{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} D\right)} \quad (4.2 - 4)$$

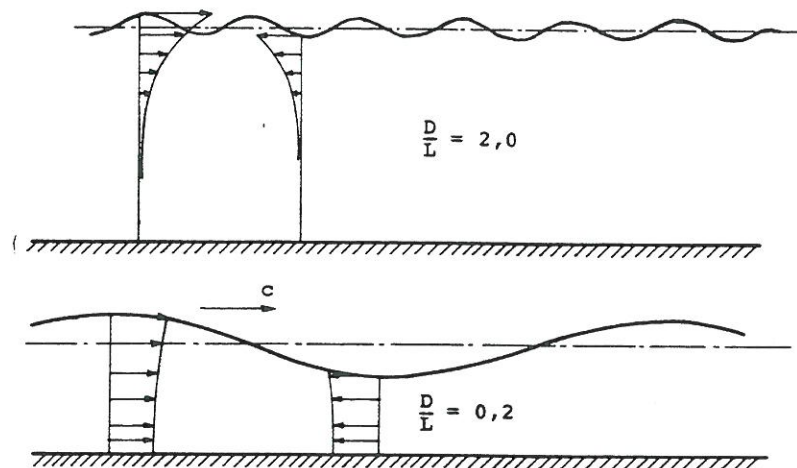
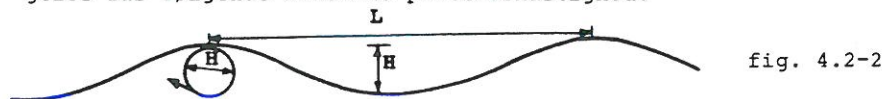


fig. 4.2-1, Partikelhastighedernes variation med vanddybden.

Den maximale partikelhastighed for dybvandsbølger

Som vi senere skal se, er den maximale bølgestejlhed på dybt vand ca $\frac{1}{7}$. Antages partikelbevægelsen at være en cirkelbevægelse fås følgende maximale partikelhastighed:



I løbet af 1 periode bevæger bølgen sig længden L

I løbet af 1 periode bevæger partiklen sig længden $H \pi$

Da H maksimalt kan blive $\frac{1}{7} L$ må partikelhastigheden højst blive

$$\frac{\frac{1}{7} L \pi}{L} c \sim 0,45 c$$

4.3 Partikelbanerne

Efter 1. ordens teorien kan partikelbanerne beregnes til følgende, idet indices "m" skal angive middelpositionen.

$$x = x_m + \frac{1}{2} H \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (y_m + D)}{\sinh \left(\frac{2\pi}{L} D \right)} \cdot \cos \frac{2\pi}{L} (x_m - ct) \quad (4.3-1)$$

$$y = y_m + \frac{1}{2} H \frac{\sinh \frac{2\pi}{L} (y_m + D)}{\sinh \left(\frac{2\pi}{L} D \right)} \cdot \sin \frac{2\pi}{L} (x_m - ct) \quad (4.3-2)$$

Partiklerne bevæger sig altså i ellipser med følgende halve storakser

$$\text{vandret:} \quad a = \frac{1}{2} H \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (y_m + D)}{\sinh \left(\frac{2\pi}{L} D \right)} \quad (4.3-3)$$

$$\text{lodret:} \quad b = \frac{1}{2} H \frac{\sinh \frac{2\pi}{L} (y_m + D)}{\sinh \left(\frac{2\pi}{L} D \right)} \quad (4.3-4)$$

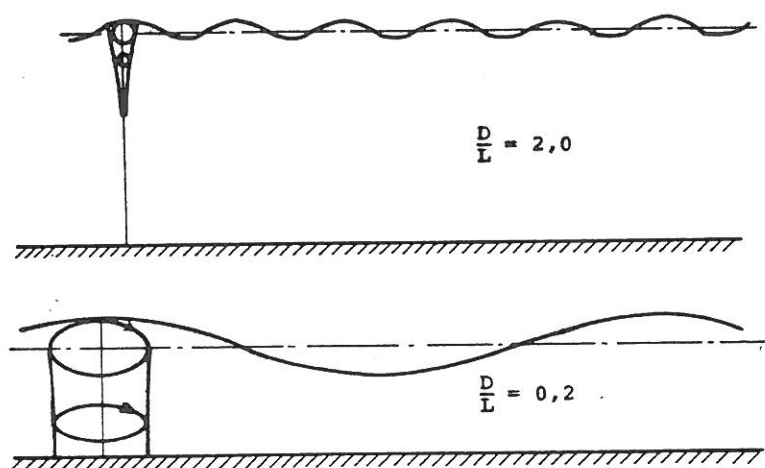


fig. 4.3-1, Partikelbanernes variation med vanddybden

I 2. og højere ordens teorier er partikelbevægelsen i overfladen svagt resulterende i bølgens bevægelsesretning.

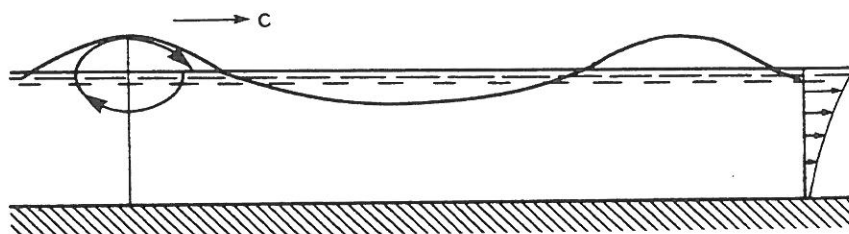


fig. 4.3-2, Partikelbevægelse og resulterende vandføring i bølge af endelig højde (principielt).

Den resulterende vandføring er voksende med voksende bølgestejlhed.

4.4 Trykvariationen

Efter 1. ordens teorien kan overtrykket som følge af bølgebevægelsen beregnes til

$$p^+ = \gamma \cdot \frac{H}{2} \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{L}(y+D)\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot D\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right) \quad (4.4-1)$$

Dette udtryk kan udledes ved hjælp af Bernoullis ligning, når man kender hastighedsfordelingen i den i fig. 4.1-1 (pag. 4.1 - 2) viste stationære strømning.

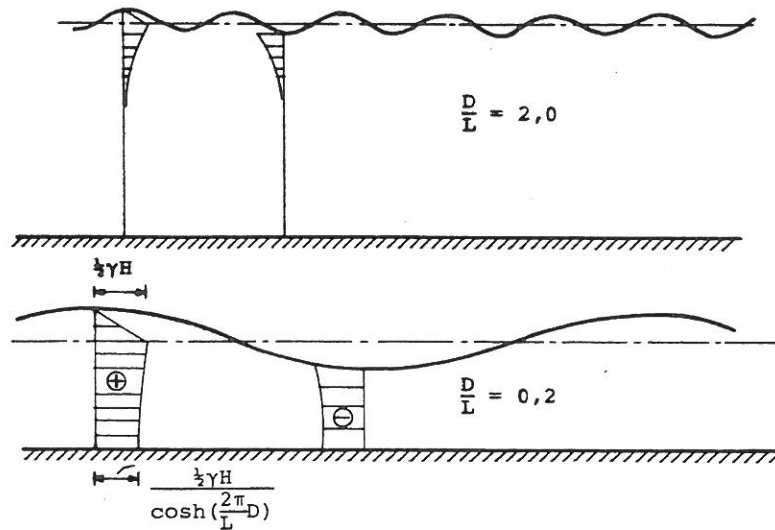


fig. 4.4-1, Trykvariationen under bølger.

4.5 Bølgeenergi

På grund af den varierende højde af vandspejlet indeholder vandbølger en vis potentiel energi. Efter 1. ordens teorien, hvor det antages at overfladen følger en simpel sinuskurve, kan den gennemsnitlige potentielle energi pr. fladeenhed beregnes til

$$E_p = \frac{1}{16} \gamma H^2$$

En 1. ordens bølges gennemsnitlige kinetiske energi pr. fladeenhed kan findes ved integration af alle vandpartiklers kinetiske energi, og den gennemsnitlige kinetiske energi pr. fladeenhed bliver ligeledes

$$E_{kin} = \frac{1}{16} \gamma H^2$$

Den samlede bølgeenergi bliver herefter

$$E = \frac{1}{8} \gamma H^2 \quad (4.5-1)$$

Dette udtryk gælder ikke eksakt for bølger af endelig højde, men er normalt nøjagtigt nok til de fleste praktiske formål.

Transporteret energi

Den energi som pr. bølgeperiode passerer en lodret flade vinkelret på bølgens forplantningsretning kan ved integration findes til

$$E_{tr} = \frac{1}{16} \gamma H^2 L \left(1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh(2 \frac{2\pi}{L} D)} \right) \quad (4.5-2)$$

Da faktoren $\left(1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh \left(2 \frac{2\pi}{L} D\right)}\right)$ antager værdier fra 1 til 2

vil man se, at den energi som i løbet af 1. periode passerer en lodret flade er mellem 50-100% af den energi, som en bølgelængde af bølgen indeholder.

Dette udtrykkes ofte på den måde, at bølgeenergien forplanter sig med en anden hastighed end bølgeformen.

Denne teoretiske hastighed C_g kan defineres efter udtrykket

$$E_{tr} = C_g E \quad (4.5-3)$$

indsættes heri fås

$$C_g = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh \left(2 \frac{2\pi}{L} D\right)}\right) \quad (4.5-4)$$

indsættes $D = 0$ og $D = \infty$ fås

$$\begin{aligned} C_g &= C && \text{for fladvandsbølger} \\ C_g &= \frac{1}{2}C && \text{for dybtvandsbølger.} \end{aligned}$$

Dette tilsyneladende paradoks at bølgeenergien ikke kan følge med bølgeformen kan observeres, hvis man iagttager en bølgegruppe på dybt vand med et endeligt antal bølger, f.eks. kølvandsbølger efter et skib. Hvis man prøver at fastholde en bølge i midten af bølgegruppen, vil man se, at denne bevæger sig fremad i gruppen samtidig med, at højden aftager til nul i det øjeblik, at bølgen skal til at forlade gruppen. I den bageste del af gruppen vil man til gengæld se bølger vokse op tilsyneladende af ingenting og vandre frem i gruppen.

For en sådan bølgegruppe kan man derfor definere to hastigheder nemlig bølgehastigheden og gruppehastigheden, og man kan umiddelbart forstå, at bølgegruppens energi må forplante sig med gruppehastigheden.

4.6 Refleksion og stående bølger

Det er almindeligt kendt, at lysbølger, radiobølger, lydbølger o.s.v. reflekteres, når de rammer faste begrænsninger.

Vandbølger reflekteres ligeledes og en hel del af de regler som gælder f.eks. for lysbølger kan overføres hertil.

Bevæger bølger sig vinkelret ind på en lodret, plan og impermeabel flade, vil den indkomne bølge reflekteres fuldstændigt og herefter interferere med de følgende, og der opstår det man kalder stående bølger.

Da de grundlæggende ligninger i 1. ordens teorien er liniære kan simpel superposition anvendes.

Er den indkomne bølge

$$y = \frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct)$$

og den tilbagekastede

$$y = \frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{L} (x+ct)$$

summen af disse bliver

$$y = 2 \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Man kan heraf se, at bølgen har ændret karakter, idet bevægelsen ikke længere kan betegnes som fremadskridende. Bølgehøjden varierer fra 0 til $2H$.

For bølger med endelig højde er superposition ikke korrekt. Den mest kendte og anvendte løsning er den af Sainflou udviklede.

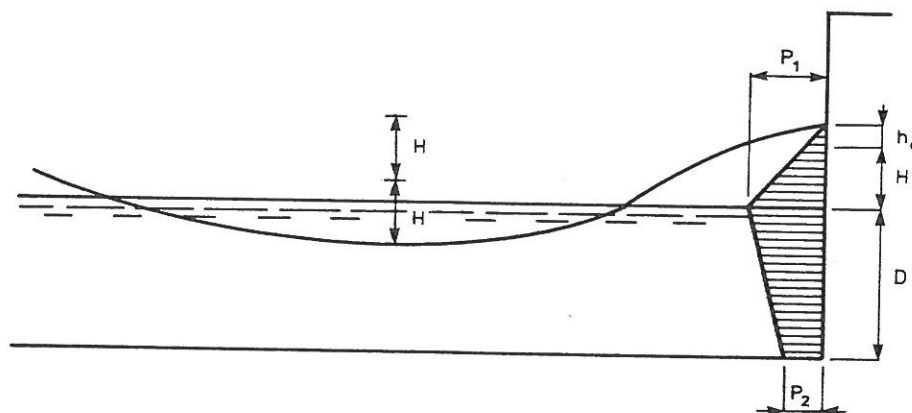


fig. 4.6-2 Sainflous bølgetryk (stående bølge)

$$h_0 = \frac{\pi}{L} H^2 \coth \left(\frac{2\pi}{L} D \right)$$

$$P_1 = \gamma (H + h_0)$$

$$P_2 = \gamma (H + h_0) \frac{1}{\cosh \frac{2\pi}{L} D}$$

Normalt regner man med retlinet variation mellem p_1 og p_2 .

Sainflous bølgetryk baserer sig på trykvariationen, som den findes af 1. ordens teorien, men hvor der dog ved beregning af bølgehøjden er taget hensyn til den forskel, som 2. ordens teorien medfører.

Imidlertid giver Sainflous formler lidt for store tryk under bølgetoppen og lidt for små undertryk under bølgedalen, når der er tale om stejle bølger. Til belysning heraf er der i fig. 4.6-2 vist trykfordelingen under en forholdsvis stejl bølge, beregnet efter Sainflou og efter 2. ordens teorien.

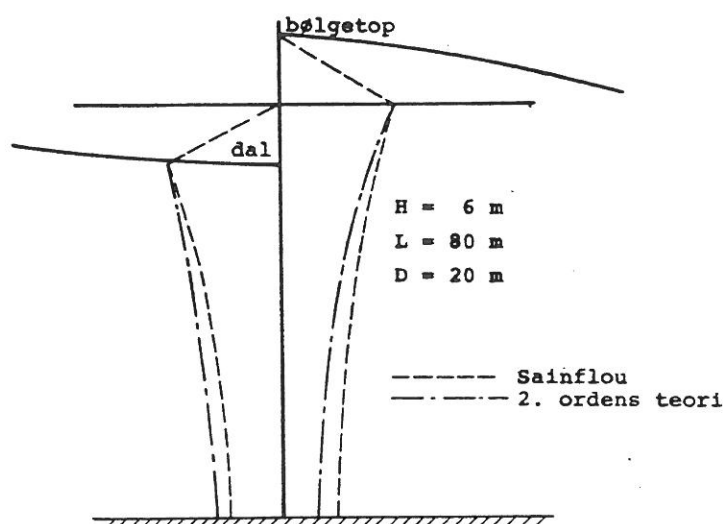


fig. 4.6-3 Trykvariationen under en stående bølge, efter [1] pag. 28.

4.7 Instabilitet i bølgeformen

Bølgemålinger under stormperioder viser, at bølgehøjderne næsten aldrig bliver større end ca $1/10$ af bølgelængden. Hvis man i laboratoriet forsøger at generere høje bølger, vil man opdage, at det kun er muligt at producere bølger med højde på op til $1/8 - 1/10$ af bølgelængden. Forsøger man at gå længere, vil man se, at bølgerne bryder. Populært kan man sige, at en bølge bryder når partikelhastigheden overstiger bølgehastigheden. Teoretiske beregninger har vist, at den maksimale bølgestejlhed på dybt vand er $0,142$. På endelig vanddybde er udtrykket

$$\frac{H}{L} = 0,142 \tanh\left(\frac{2\pi}{L} D\right) \quad (4.7-1)$$

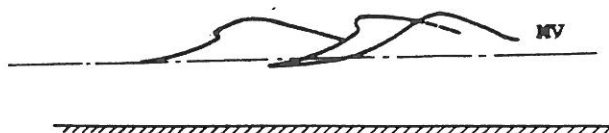
Som vi skal se i næste afsnit 4.8, vil bølgelængden, for bølger som løber ind på en mindre vanddybde, aftage. Da bølgehøjden næsten ikke ændrer sig, bliver bølgestejlheden større og større indtil den ovenfor nævnte grænse, hvorefter bølgen bryder.

For fladvandsbølger, d.v.s. når $\frac{D}{L} < \frac{1}{20}$ reduceres udtryk (4.7-1) til

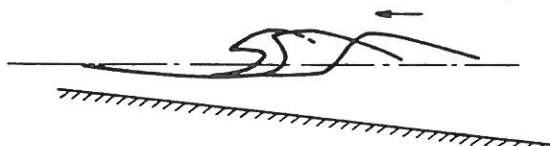
$$H \leq 0,8D \quad (4.7-2)$$

I naturen finder man aldrig to ens bølger, og derfor vil brydningen også ske på forskellig måde. Imidlertid kan man konstatere, at bølger bryder på i hvert fald tre principielt forskellige måder.

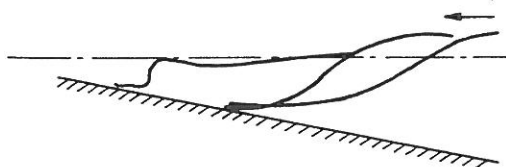
1) Topbrænding (spilling breakers)



2) Styrbrænding (plunging breakers)



3) Total brænding (surging breakers)



Brydningsformen afhænger af bølgestejlheden og bundens stejthed.
Experimentelt (Wiegel) har man fundet nedenstående

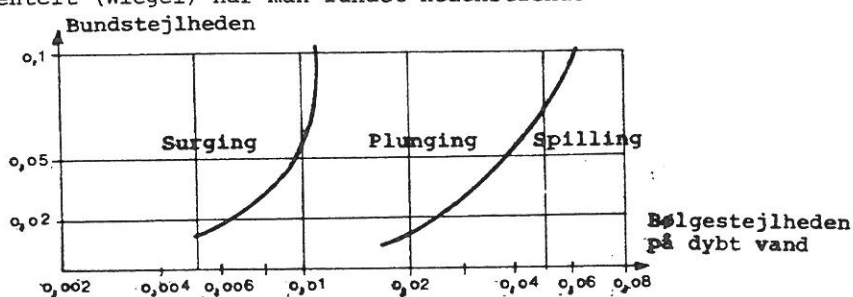


fig. 4.7-4, Brydningsformens afhængighed af bølgestejlhed og bundstejlhed.

4.8 Bølgeformens ændring med vanddybden

De fleste har vel den erfaring fra kysterne, at bølgerne ændrer sig når de nærmer sig stranden. Roligt vejr, når der kun løber mindre dønninger, er særligt egnet til disse iagttagelser.

Befinder man sig langt fra stranden, vil bølgebevægelsen virke meget beskeden. Hvis man målte bølgerne, ville man se, at de meget nær var små 1. ordens bølger, d.v.s. sinusbølger. Længere inde kan man iagttage, at bølgerne "rejser sig". Denne rejse skyldes i princippet to ting. For det første medfører den mindre vanddybde, at bølgenes forplantningshastighed bliver mindre, hvorved bølgelængden bliver mindre, og dermed bliver bølgestejlheden større. For det andet medfører den forøgede stejlehed, at bølgerne efterhånden ændrer karakter i retning af 2. og højere ordens bølger, hvilket forøger det umiddelbare indtryk af at bølgerne vokser.

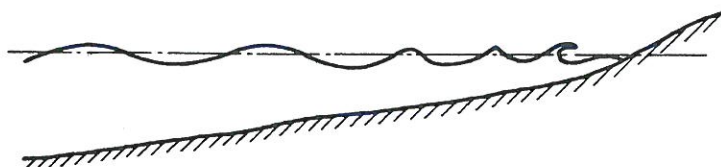


fig. 4.8-1, Ændring i bølgeformen

Denne ændring i bølgeformen er udelukkende en konsekvens af den randbetingelse der siger, at bunden skal være en strømlinie.

Teoretiske beregninger af bølgers brydning efter potentialteorien giver således resultater, som kan reproducere i laboratoriet. Forklaringer gående ud på at bølgers brydning skyldes, at friktionen ved bunden bremser den nederste del af bølgen o.s.v. må derfor være forkerte.

Beregning af ændringer i bølgelængden foregår principielt efter formelen

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{L} D\right)}$$

samt den grundlæggende formel for alle periodiske bølger

$$c = L \frac{1}{T} \quad \text{som indsat giver}$$

$$L \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{L} D\right)}$$

Da der må passere det samme antal bølger pr. tidsenhed gennem alle snit, må bølgeperioden være konstant overalt (gælder naturligvis kun ved periodiske bølger).

Divideres sidstnævnte formel med udtrykket gældende for dybt vand

$$c = \frac{L_0}{T} = \sqrt{\frac{gL_0}{2\pi}} \quad \text{fås}$$

$$L = L_0 \tanh\left(\frac{2\pi}{L} D\right) \quad \text{eller}$$

$$\frac{D}{L_0} = \frac{D}{L} \tanh\left(2\pi \frac{D}{L}\right) \quad (4.8-1)$$

Tabel over sammenhørende værdier af $\frac{D}{L_0}$ og $\frac{D}{L}$ er angivet i bølgetabellen 4.12.

Ændring i bølgehøjden

Den bølgeenergi som passerer forskellige snit vinkelret på bølgens vej mod kysten må være konstant, idet der i modsat fald vil ophobes energi undervejs, hvad naturligvis ikke er muligt. Men da vi husker fra afsnit 4.5, at den transporterede pr. periode energi kan beregnes til

$$E_{tr} = \frac{1}{16} \gamma H^2 L \left(1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh \left(2 \frac{2\pi}{L} D \right)} \right)$$

Energitransporten pr. tidsenhed fås ved division med T:

$$\begin{aligned} E_{tr} &= \frac{1}{16} \gamma H^2 c \left(1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh \left(2 \frac{2\pi}{L} D \right)} \right) \\ &= \frac{1}{16} \gamma H^2 \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi}{L} D} \left(1 + \frac{(2 \frac{2\pi}{L} D)}{\sinh 2 \frac{2\pi}{L} D} \right) \end{aligned}$$

Divideres dette udtryk med udtrykket på dybt vand:

$$E_{tr} = \frac{1}{16} \gamma H_o^2 \sqrt{\frac{gL_o}{2\pi}} \quad \text{og omformes fås:}$$

$$\frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{1}{\tanh \left(\frac{2\pi}{L} D \right)} \left(\frac{1}{1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} D}{\sinh \left(2 \frac{2\pi}{L} D \right)}} \right)} \quad (4.8-2)$$

Man kan heraf se, at denne variation i bølgehastighed og energitransporthastighed giver sig udslag i ændring i bølgehøjden.

$\frac{H}{H_o}$'s variation med $\frac{D}{L_o}$ ses af bølgetabellen bag i bogen.

Eksempel

En bølge med $H_o = 3\text{ m}$ og $T = 10\text{ sec}$ løber vinkelret ind mod en flad kyst, beregn ændringerne i bølgelængde, hastighed, højde og stejlehed under vejs.

Beregningerne er foretaget ved hjælp af bølgetabellen og resultaterne vist i nedenstående tabel

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56 T^2 \text{ (i meter)} \\ L_o = 156 \text{ m}$$

$\frac{D}{m}$	$\frac{D}{L_o}$	$\tanh \frac{2\pi}{L} D$	$\frac{D}{L}$	$\frac{L}{m}$	$\frac{c}{m/s}$	$\frac{H}{m}$	$S = \frac{H}{\frac{H}{L}}$
∞	∞	1	∞	156	15,6	3,00	1,9
50	0,321	0,969	0,332	151	15,1	2,86	1,9
20	0,128	0,776	0,165	121	12,1	2,75	2,3
10	0,064	0,591	0,108	92	9,2	2,95	3,2
5	0,032	0,432	0,074	68	6,8	3,21	4,8

4.9 Refraktion

Da bølgehastigheden aftager med aftagende vanddybde, vil bølger som løber skævt ind mod en kyst drejes således, at de til sidst næsten løber vinkelret ind mod kysten.

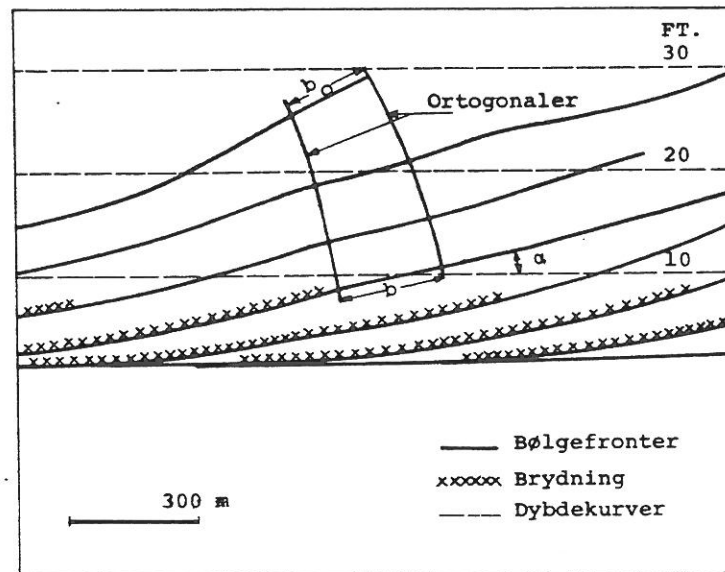


fig. 4.9-1 Refraktion

I det følgende skal vises hvorledes problemet kan behandles, såfremt de indkomne bølger er simple, plane, regelmæssige bølger.

Bølgeortogonalmetoden

Talrige målinger har vist, at Snell's lov, som gælder for brydning af lysbølger, kan overføres til overfladebølger.

Snell's lov lyder som bekendt

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

hvor α_1 og α_2 er vinklerne mellem bølgefronterne og de respektive bundkurver eller de tilhørende ortogonaler, og C_1 og C_2 er de tilsvarende bølgehastigheder. Såfremt bundkurverne er parallelle, kan Snell's lov benyttes direkte mellem to vilkårlige punkter, medens det vil være nødvendigt at udføre en stykkevis beregning, såfremt bundkurverne ikke er parallelle. I dette tilfælde kan Snell's lov omskrives til

$$\frac{\sin (\alpha + \Delta \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{C + \Delta C}{C}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \Delta \alpha + \cos \alpha \sin \Delta \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \frac{\Delta C}{C}$$

antages $\Delta\alpha$ så lille, at $\cos\Delta\alpha = 1$ og $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$ fås

$$1 + \Delta\alpha \cot\alpha = 1 + \frac{\Delta C}{C} \quad \text{hvoraf}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta C}{C} \tan\alpha$$

udfra $C = \frac{1}{T}L$ ses at dette udtryk kan skrives

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta L}{L} \tan\alpha \quad (4.9-1)$$

Det bemærkes, at $\Delta\alpha$ svarer til vinkeldrejningen af bølgefronten i forhold til den samme dybdekurve ($\Delta\alpha < 0$)

Af hensyn til den praktiske beregning af bølgeortogonalens forløb, kan dennes krumningsradius indføres ved følgende omskrivning

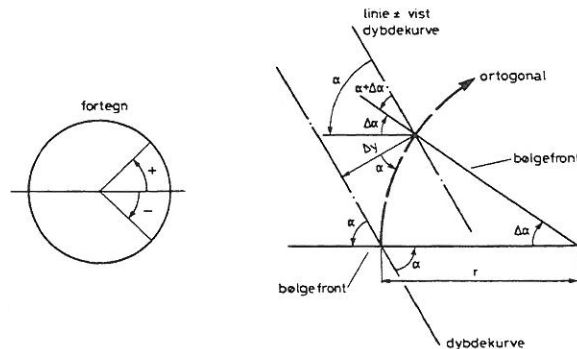


fig. 4.9-2 Indførelse af krumningsradius i formler for refraction (kun én dybdekurve vist)

$$r(-\Delta\alpha) = \frac{\Delta y}{\cos\alpha}$$

$$-\Delta\alpha = \frac{\Delta y}{r \cos\alpha} \quad \text{dette sammenholdt med (4.9-1) giver}$$

$$r = -\frac{L \Delta y}{\Delta L \sin\alpha} \quad (4.9-2)$$

Bølgefrontmetoden

Bølgefrontmetoden baserer sig på det såkaldte Huygens princip, hvorefter bølger kan opfattes som opbygget af elementarbølger som forplanter sig i alle retninger. Bølgefronterne opstår da ved interferens mellem elementarbølgerne fra den foregående bølgefront.

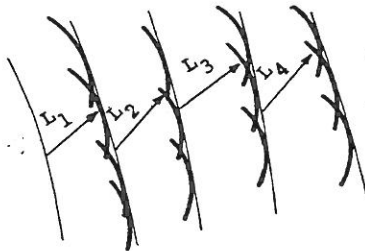


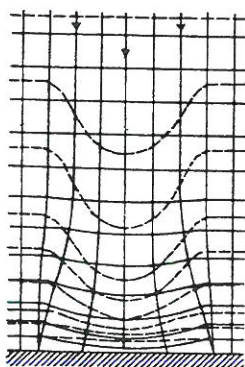
fig. 4.9-3 Huygens princip

Optegningen af de refrakterede bølgefronter sker efter det på figuren viste princip, idet der tages hensyn til bølgelængdernes afhængighed af vanddybden.

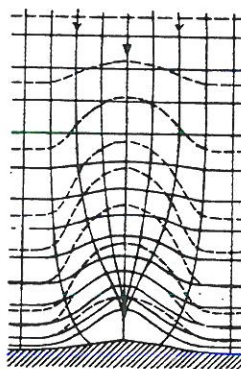
Denne metode har visse svagheder, bl.a. vil det være vanskeligt at få eventuelle krydsende ortogonaler frem ved optegningen.

Ændring i bølgehøjden som følge af refraction.

Da bølgefronterne ved refraction drejer, vil længden af bølgefronterne ændres. Man kan heraf umiddelbart konkludere, at dette må betyde en formindskelse af bølgehøjden, hvor bølgefronterne forlænges, og en forøgelse af bølgehøjderne, hvor bølgefronterne forkortes.



Formindsket bølgehøjde ved undersøisk dal.



Forøget bølgehøjde ved undersøisk højderyg.

fig. 4.9-4 Refraktionens indflydelse på bølgehøjden

En simpel, men ikke særlig eksakt eller nøjagtig, måde at beregne ændringen i bølgehøjden knytter sig til de to tidligere omtalte metoder til optegning af bølgeortogonaler og fronter. Udgangspunktet er, at bølgeenergien forplanter sig i samme retning som bølgerne d.v.s. efter bølgeortogonalerne. Der vil derfor ikke ske en udveksling af energi på tværs af bølgeortogonalerne, og man kan derfor antage, at den energi som forplanter sig mellem to ortogonaler er konstant.

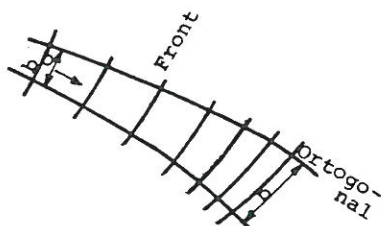


fig. 4.9-4

Den energi som transporteres gennem de to snit er lige store og lig med

$$E_o C_{go} b_o = E C_g b$$

Da $E = \frac{1}{8} \gamma H^2$ fås

$$\frac{1}{8} \gamma H_o^2 C_{go} b_o = \frac{1}{8} \gamma H^2 C_g b \quad \text{hvoraf}$$

$$H = H_o \sqrt{\frac{C_{go}}{C_g}} \sqrt{\frac{b_o}{b}}$$

I bølgetabellen er direkte angivet den relative bølgehøjde $\frac{H}{H_o}$'s afhængighed af $\frac{D}{L_o}$, d.v.s $\frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{C_{go}}{C_g}}$ for bølger uden refraction.

Den refrakterede bølges relative højde findes let ved multiplikation med $\sqrt{\frac{b_o}{b}}$.

4.10 Diffraction

Fra lyslæren kendes fænomenet diffraction. Lader man lys passere en meget tynd spalte, vil man observere, at lyset spredes i andre retninger end den oprindelige lysstråles retning. Det samme fænomen kan iagttages for bølger på vandoverfladen.

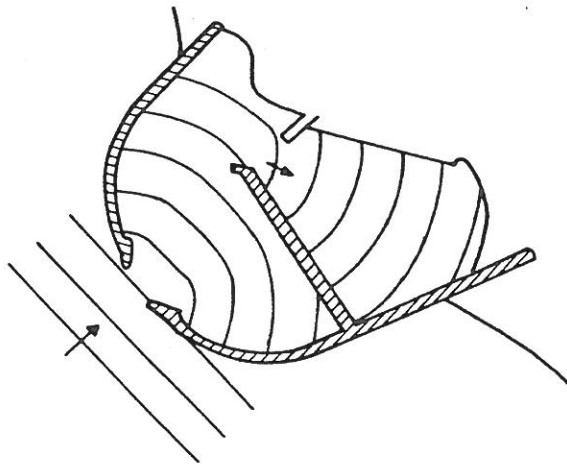


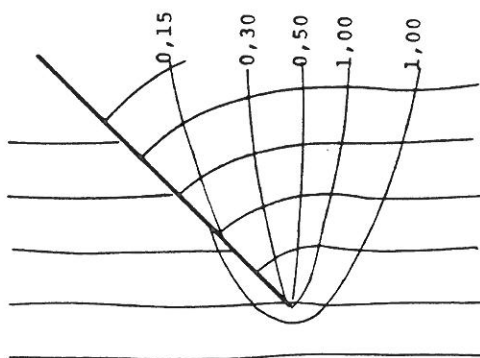
fig. 4.10-1 Eksempel på diffraction ved en havn

Da de grundlæggende ligninger for de fleste bølgefænomeners udbredelse formelt er de samme, kan vi her drage nytte af en løsning udledt for elektromagnetiske bølgers bøjning om en halv-uendelig skærm (Sommerfeld 1896).

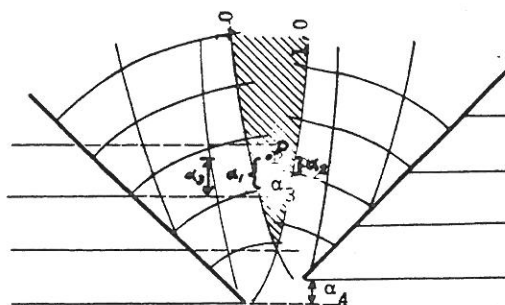
Den grafiske løsning er angivet på følgende side, hvor bølgefronterne er vist.

Ændringen i bølgehøjden ses ligeledes på figuren, idet de viste tal er den såkaldte diffraktionskoefficient, som defineres som den diffrakterede bølges bølgehøjde i forhold til den indkomne bølges højde. Diagrammet er udformet under forudsætning af, at den retlinede konstruktion, som bølgerne diffrakterer om, er fuldstændig absorberende.

Diffraktionen ved havnemundingen med to moler kan med en begrænset nøjagtighed beregnes ud fra diffraktionsdiagrammet. Diagrammet benyttes først på den ene mole, hvorefter det spejlvendes og benyttes på den anden mole. Herved har man medtaget to indkomne bølger, hvorfor en må fratrækkes.



Diffraktion om 1 mole



Diffraktion om 2 moler

fig. 4.10-2

Af fig. 4.10-2 ses, at for de områder, som ikke er skraveret, kan bølgehøjden beregnes som om den modsatte mole ikke eksisterede. Inden for det skraverede område beregnes bølgehøjden ved superposition af de to diffrakterede bølger. Det er imidlertid nødvendigt at medtage faseforskydningen i regningen, da to bølgetoppe ikke vil optræde samtidigt i alle punkter. Sammenlægningen af de to diffrakterede bølger og fratrækningen af den ikke diffrakterede bølge kan foretages vektorielt som vist i følgende figur.

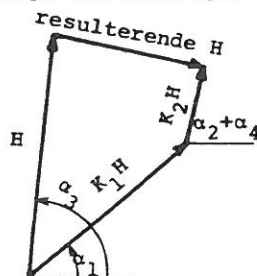


fig. 4.10-3, Resulterende bølgehøjde ved superposition af forskellige bølger med samme længde men med forskellig fase.

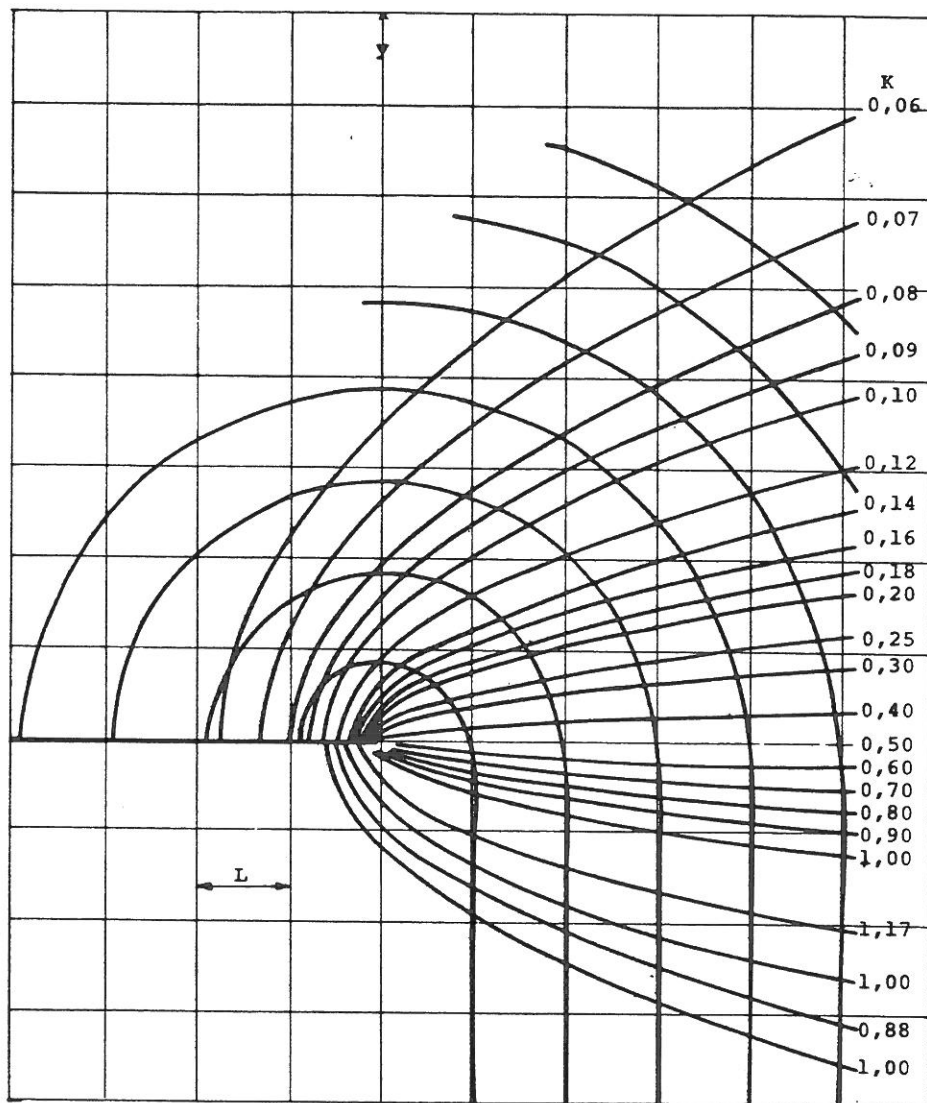


fig. 4.10-4, Diffractionsdiagram for fuldstændig absorberende mole.

$$K = \frac{\text{diffrakteret bølges højde}}{\text{indkomne bølges højde}}$$

4.11 Hyperbolske funktioner

Almindelige "cirkulære" funktioner kan defineres udfra enheds-cirklen $x^2 + y^2 = 1$

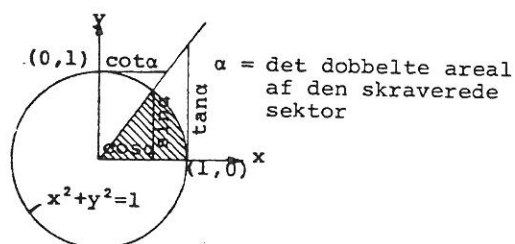


fig. 4.11-1, Geometrisk definition af almindelige cirkulære funktioner

I kompleks fremstilling kan disse udtrykkes

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad \text{og} \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

De hyperbolske funktioner defineres tilsvarende ud fra enheds-hyperplen $x^2 - y^2 = 1$

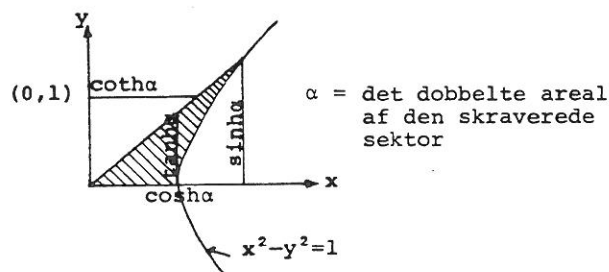


fig. 4.11-2, Geometrisk definition af hyperbolske funktioner

$$\sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{og} \quad \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

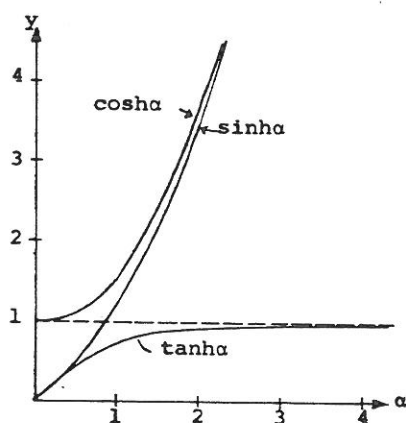


fig. 4.11-3, Hyperbolske funktioner

Se i øvrigt bølgetabellen 4.12

$\frac{D}{L_0}$	$\frac{D}{L}$	$\frac{2\pi D}{L}$	$\sinh \frac{2\pi D}{L}$	$\cosh \frac{2\pi D}{L}$	$\tanh \frac{2\pi D}{L}$	$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_g}}$
0.00	0.0000	0.000	0.000	1.00	0.000	∞
01	0403	253	256	03	248	1.44
02	0576	362	370	07	347	23
03	0714	448	463	10	420	12
04	0833	523	548	14	480	06
0.05	0.0942	0.592	0.627	1.18	0.531	1.02
06	104	655	703	22	575	0.993
07	114	716	778	27	614	971
08	123	774	854	31	649	955
09	132	831	0.930	36	681	942
0.10	0.141	0.886	1.01	1.42	0.709	0.933
11	150	940	08	48	735	926
12	158	0.994	16	54	759	920
13	166	1.05	25	60	780	917
14	175	10	33	67	800	915
0.15	0.183	1.15	1.42	1.74	0.818	0.913
16	192	20	52	82	835	913
17	200	26	61	90	850	913
18	208	31	72	1.99	864	914
19	217	36	82	2.08	877	916
0.20	0.225	1.41	1.94	2.18	0.888	0.918
21	234	47	2.06	28	899	920
22	242	52	18	40	909	923
23	251	58	31	52	918	926
24	259	63	45	65	926	929
0.25	0.268	1.68	2.60	2.78	0.933	0.932
26	277	74	76	2.93	940	936
27	285	79	2.92	3.09	946	939
28	294	85	3.10	25	952	942
29	303	90	28	43	957	946
0.30	0.312	1.96	3.48	3.62	0.961	0.949
31	321	2.02	69	3.83	965	952
32	330	08	3.92	4.04	969	955
33	339	13	4.16	28	972	958
34	349	19	41	52	975	961
0.35	0.358	2.25	4.68	4.79	0.978	0.964
36	367	31	4.97	5.07	980	967
37	377	37	5.28	37	982	969
38	386	42	61	5.70	984	972
39	396	48	5.96	6.04	986	974
0.40	0.405	2.54	6.33	6.41	0.988	0.976
41	414	60	6.72	6.80	989	978
42	424	66	7.15	7.22	990	980
43	434	72	7.60	7.66	991	982
44	443	79	8.08	8.14	992	983
0.45	0.453	2.85	8.58	8.64	0.993	0.985
46	463	91	9.13	9.19	994	986
47	472	2.97	9.71	9.76	995	987
48	482	3.03	10.3	10.4	995	988
49	492	09	11.0	11.0	996	990
0.50	0.502	3.15	11.7	11.7	0.996	0.990

5. VINDGENEREREDE BØLGER

Vindgenererede bølger udviser en meget uregelmæssig overflade, hvor bølger af mange forskellige størrelser forekommer. Bølgerne vil endvidere være kortkammede (3-dimensionale) som følge af, at bølgeenergien udbreder sig over et vinkelrum. Den ovenfor givne fremstilling, der baserer sig på periodiske, todimensionale bølger, passer derfor ikke på de i naturen forekommende vindgenererede bølger. Det viser sig imidlertid, at de udledte teorier og beskrivelser er brugelige i mange sammenhænge, såfremt man som bølgehøjde, -længde og -periode anvender værdier, som på relevant måde er karakteristiske for de virkelige bølger. Ofte anvendes en karakteristisk bølgehøjde fx den såkaldte signifikante bølgehøjde, H_s , der defineres som middelhøjden for den største trediedel af bølgerne. Denne værdi indgår i nogle formler for beregning af blokkastningsskråningers stabilitet. Karakteristiske værdier kan dog ikke altid benyttes. For eksempel må størsteværdier af opskylshøjde bestemmes ud fra de største bølger i bølgetoget samt bølgerækkefølgen (bølgegrupper).

Det skal nævnes, at virkelige bølger med god tilnærmelse kan anses for todimensionale (langkammede) i den relativt lavvandede kystzone, hvor bølgerne udsættes for refraction.

I det følgende redegøres der for hvordan bølgerne normalt beskrives ud fra det 2-dimensionale energispektrum. Angående det 3-dimensionale spektrum samt mere specielle parameterbeskrivelser, som for eksempel bølgegrupper, henvises til speciallitteraturen.

Da en eksakt beskrivelse af vindgenererede bølger ikke er mulig, må man benytte sig af tilnærmede modeller. Opgaven for den praktiserende ingeniør er derfor at vælge den simpleste model, som er nødvendig for at løse det konkrete problem. Nedenstående er nævnt nogle af de forskellige modeller, som hidtil er udviklet.

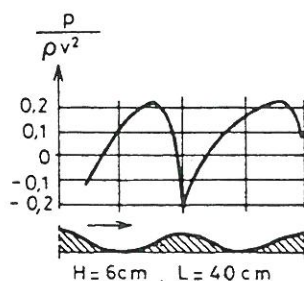
Den simpleste model er antagelsen om, at vindbølger er todimensionale, regelmæssige bølger som omtalt i foregående afsnit. Denne antagelse ligger til grund for langt den største del af de modelforsøg, der hidtil verden over har været udført med havnebygværker. Svagheden ved denne model ligger i manglen af den tilfældige (stokastiske) karakter, som vindbølger har.

En mere forfinet model er antagelsen om, at vindbølger er uregelmæssige, todimensionale bølger (dvs. alle bølgefronter parallelle). Sådanne bølger genereres forholdsvis let i laboratoriet, hvorfor metoden de sidste år har fundet temmelig stor anvendelse ved modelforsøg.

Den i øjeblikket mest avancerede beskrivelsesmodel baserer sig på uregelmæssige bølger med varierende udbredelsesretning, dvs. tredimensionale bølger. En sådan model er bl.a. nødvendig ved nøjere fysisk beskrivelse af vindbølgers opvoksen og henfald. Den teoretiske beskrivelse samt de eksperimentelle metoder til frembringelse af sådanne bølger er under stadig udvikling. Enkelte laboratorier anvender nu tredimensionale bølger ved modelforsøg, hvor de todimensionale bølger giver misvisende resultater.

5.1 Bølgers opståen

Ved vindhastigheder på under 0,9-1,0 m/sec genereres normalt ikke bølger på vandoverfladen selvom trykfluktuationerne i vinden vil give forstyrrelser på overfladen. Bliver vindhastigheden større, vil der dannes små stejle bølger med en længde på 5-10 cm og højder på 1-2 cm. Disse vil forplante sig i vindens retning, samtidig med at de bliver både større og længere på grund af energitilførslen fra vinden.



Figur 5.1.1. Trykfordeling over fast sinusformet bund ved vindtunnelforsøg.

På fig. 5.1-1 ses måleresultater fra laboratorieforsøg, hvor trykfordelingen i luften, umiddelbart over regelmæssige sinusbølger, er vist.

Efter potentialteorien skulle trykfordelingen være helt symmetrisk, således at der ikke skulle kunne overføres energi til bølgerne. Da luften imidlertid ikke kan opfattes som en fuldstændig ideal vædske, opstår den viste skæve trykfordeling.

Når bølgerne i naturen bevæger sig i vindens retning med en hastighed mindre end vindhastigheden, udfører lufttrykket et positivt arbejde, og bølgerne tilføres energi. Herudover vil energi overføres direkte ved friktion. Tilføres mere energi end der går tabt ved dissipation vokser bølgerne.

5.2 Statistisk fordeling af bølgehøjder og perioder, variansspektret

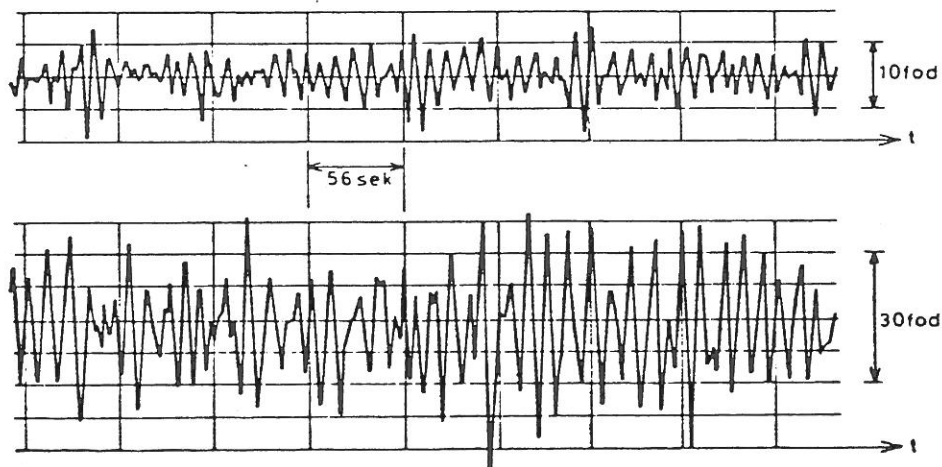


fig. 5.2-1 To eksempler på bølgemålinger

Ovenfor er vist to eksempler på målinger af vindbølger. Figuren, der viser variationen med tiden af den vertikale vandspejlsposition i et givet punkt, giver et vist indtryk af, hvor uregelmæssige vindbølger er.

Det komplicerede amplitudebillede kan nu bearbejdes på to principielt forskellige måder, idet man enten kan betragte amplitudebilledet som værende opbygget af en række enkeltbølger af varierende størrelse eller man kan betragte amplitudebilledet som værende sammensat af uendelig mange harmoniske bølger.

Ved den førstnævnte metode defineres de enkelte bølgers periode ud fra to på hinanden følgende op- eller nedkrydsninger af middelvandspejlsniveauet. Fig. 5.2-2 viser eksempelvis et udsnit af et amplitudesignal,

hvor de enkelte bølgeperioder er defineret ud fra nulnedkrydsningerne. Bølgehøjderne defineres nu som største vertikale afstand imellem bølgedal og bølgetop indenfor de ved nulnedkrydsningerne fundne perioder.

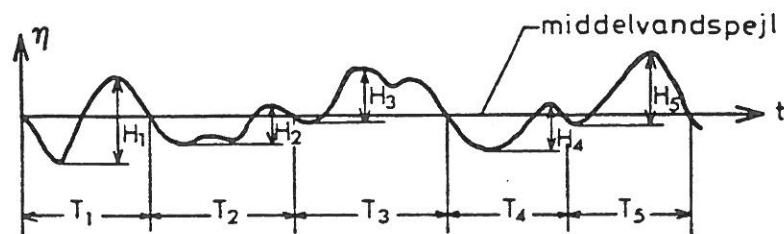


fig. 5.2-2 Definition af bølgehøjder og perioder for uregelmæssige bølger

Trods det umiddelbart uregelmæssige udseende har det vist sig, at vindbølgerne i statistisk henseende udviser en overraskende regelmæssighed, idet den statistiske fordeling af den relative bølgehøjde (f.eks. bølgehøjden i forhold til middelbølgehøjden) er nogenlunde ens for alle vindbølger, idet den ligger meget tæt på den såkaldte Rayleigh fordeling, jf. den følgende redegørelse. Dette gælder kun for bølger målt på den enkelte lokalitet under tilnærmet stationære vindforhold samt endvidere kun hvor vanddybden ikke fremkalder brydning af de største bølger og dermed en filtrering af amplitudebilledet.

Det generelle analytiske udtryk for frekvensfunktionen for Rayleigh-fordelingen er

$$f(\xi) = \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Anvendes som relativ bølgehøjde H/\bar{H} , hvor \bar{H} er middelbølgehøjden, findes følgende frekvensfunktion at repræsentere de målte bølgefordelingen

$$f(H) = \frac{\pi}{2\bar{H}^2} H e^{-\frac{\pi}{4}(H/\bar{H})^2} \quad (5.2-1)$$

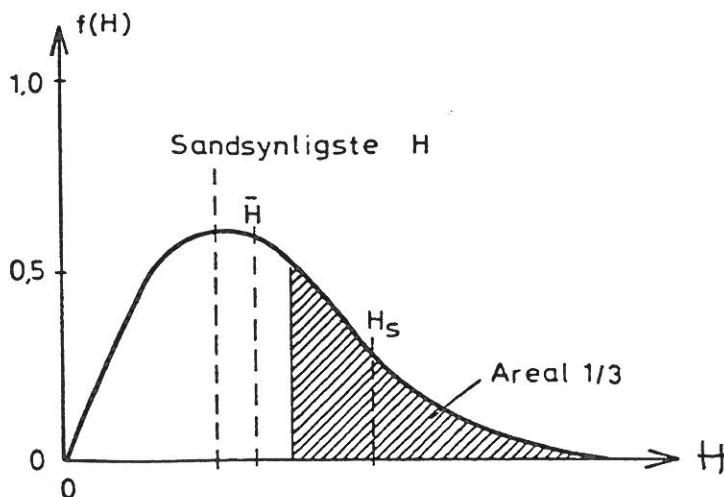


fig. 5.2-3 Rayleigh-fordelingens frekvensfunktion

Betydningen af frekvensfunktionen ses af udtrykket

$$P\{H' < H < H' + dH\} = f(H')dH ,$$

hvor P betyder sandsynligheden. Arealet under frekvensfunktionen er således 1.

På fig. 5.2-3 er angivet den signifikante bølgehøjde H_S (eller $H_{1/3}$), der defineres som middelværdien af den højeste trediedel af bølgerne. Denne højde viser sig at være omtrent sammenfaldende med iagttageres visuelle skøn af bølgehøjden. Iøvrigt optræder H_S ofte i formler som en karakteristisk værdi for de større bølger og anvendes som sådan desuden ved refraktions- og diffraktionsberegninger, jf. afsnit 4.9 og 4.10.

Den til (5.2-1) hørende fordelingsfunktion findes som

$$P\{H < H'\} = F(H') = \int_0^{H'} f(H) dH = 1 - e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H'}{H}\right)^2} \quad (5.2-2)$$

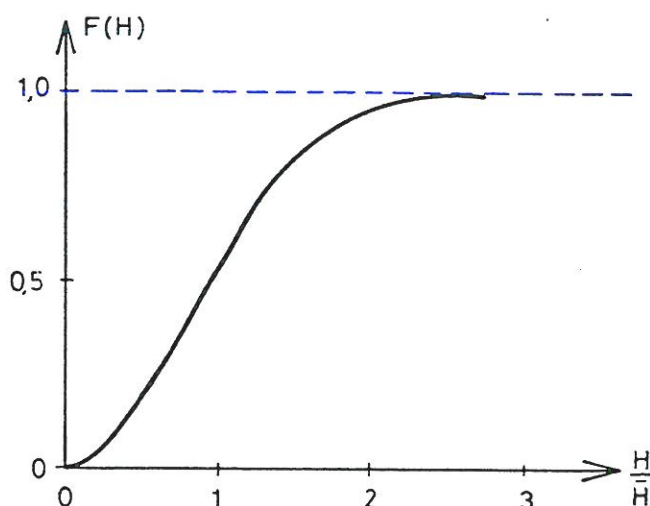


fig. 5.2-4 Rayleigh fordelingsfunktion

Ofte anvendes i stedet for $F(H)$ fordelingsfunktionen $1 - F(H)$ svarende til sandsynligheden for overskridelse af en bestemt værdi,

$$Q = P\{H > H'\} = 1 - F(H') = e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H'}{H}\right)^2} \quad (5.2-3)$$

Q benævnes ofte overskridelsessandsynligheden eller overskridelseshyppigheden. Betegnelsen akkumuleret hyppighed ses også anvendt.

Tages logaritmen til (5.2-3) findes

$$\ln Q = \ln P\{H > H'\} = -\frac{\pi}{4} \left(\frac{H'}{H}\right)^2$$

som i enkeltlogaritmisk afbildning angiver en ret linie, jf. fig. 5.2-5.

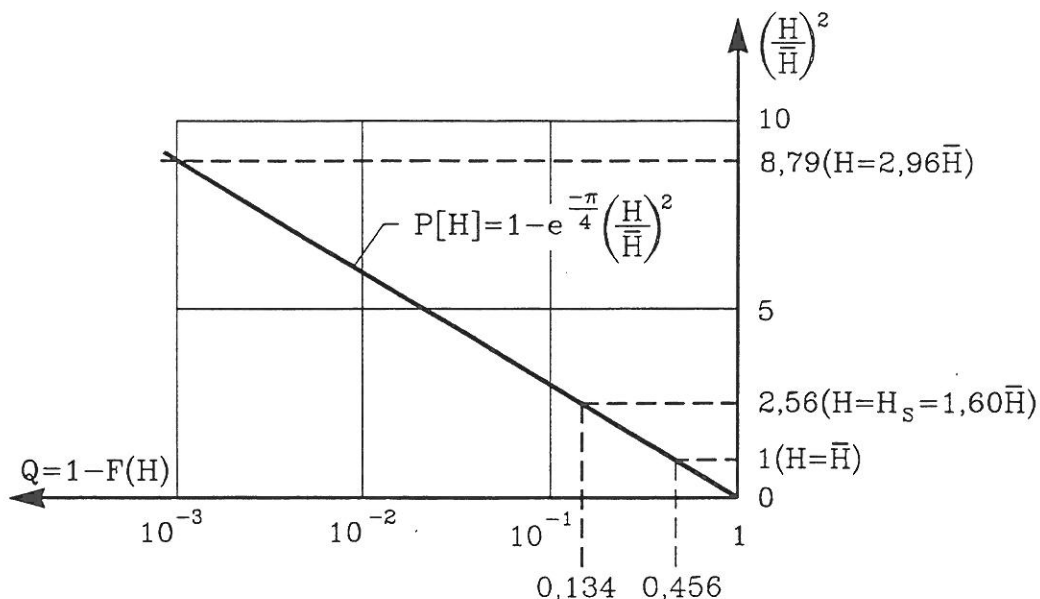


fig. 5.2-5 Overskridelsesfordelingsfunktionen efter Rayleigh

Forholdet imellem H_S og \bar{H} kan beregnes til 1,60. Af fig. 5.2-5 ses, at ca. 14% af bølgerne er større end H_S . Selv om Rayleigh-fordelingen ikke afgrænser en maximal bølgehøjde defineres en "maximal" bølgehøjde ofte som $H_{\max} = 2,96 \bar{H} = 3,0 \bar{H}$, hvilken højde kun overgås af 1% af det samlede antal bølgehøjder, jf. fig. 5.2-5. Under en storm i Nordsøen vil middelbølgeperioden være ca. 10 sec. Man kan derfor forvente en bølgehøjde, som er større end eller lig med den "maximale" ca. hver 3. time. Da en storm sjældent er på sit højeste i mere end 3-6 timer, vil den "maximale" bølgehøjde ofte være af samme størrelse som målte største bølgehøjde.

I stedet for at foretage en egentlig beregning af H_S ud fra bølgehøjderne i et amplitudesignal kan en sandsynlig værdi af H_S , et såkaldt estimat, findes ud fra kendskab til højden af en enkelt bølge, om hvilken man må vide, at det er den n 'te højeste ud af signallets N bølger. Visuelt er det lettets at finde frem til de største bølger. Meget ofte benyttes den næsthøjeste bølge som grundlag for estimatet bl.a. fordi dette erfaringsmæssigt giver gode estimater.

Idet største, næststørste, trediestørste bølgehøjde ud af N bølger benævnes H_1 , H_2 , H_3 findes følgende overskridelsessandsynligheder

$$Q_1 = P\{H > H_1\} = 0, \text{ idet } H_1 \text{ pr. definition er største bølge.}$$

$$Q_2 = P\{H > H_2\} = \frac{1}{N}, \text{ idet der kun er én bølge ud af } N, \text{ der er større end } H_2.$$

$$Q_3 = P\{H > H_3\} = \frac{2}{N}, \text{ idet der er to bølger, der er større end } H_3.$$

Den tilsvarende overskridelsesfordelingskurve kan afbildes i en trappekurve som vist på fig. 5.2-6.

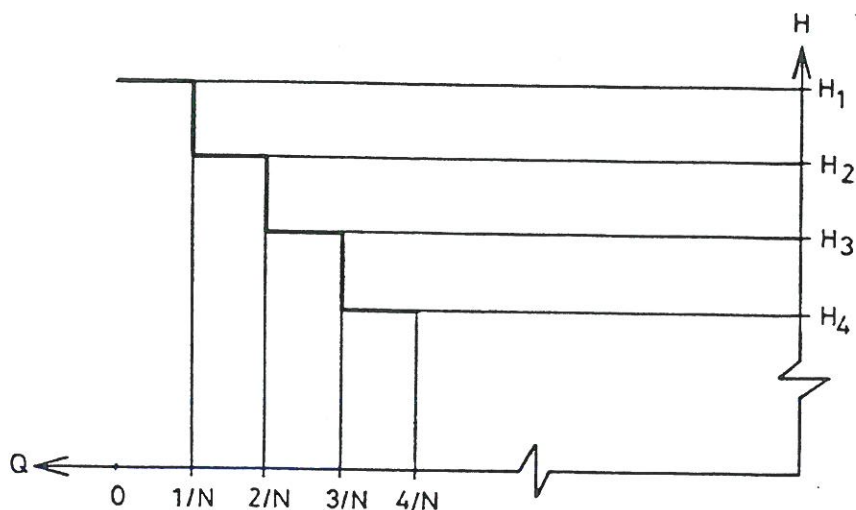


fig. 5.2-6 Trappefordelingskurve

Imidlertid er til hver af højderne H_1 , H_2 , H_3 ,----- knyttet en fordelingsfunktion, som kan findes ud fra analyse af mange bølgesignaler fra den samme statistiske population. De til et enkelt bølgesignal hørende H_1 , H_2 , H_3 ,----- kan derfor hver især opfattes som værende et udfald af mange mulige.

Antages det nu at H_1 , H_2 , H_3 ,----- repræsenterer værdier der med 50%'s sandsynlighed overskrides (eller underskrides) i de respektive sandsynlighedsintervaller findes $Q_1 = 0,5/N$, $Q_2 = 1,5/N$, $Q_3 = 2,5/N$,----- Det bemærkes, at ovennævnte værdier almindeligvis ikke er helt identiske med de sandsynligste værdier, idet der, eksempelvis såfremt fordelingsfunktionen er af Rayleigh typen (jf. fig. 5.2-3 og fig. 5.2-5), vil være en afvigelse på ca. 20%.

Den næststørste bølgehøjde H_2 findes af (5.2-3)

$$Q_2 = e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H_2}{\bar{H}}\right)^2} = \frac{1,5}{N}$$

eller

$$-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H_2}{\bar{H}}\right)^2 = \ln \frac{1,5}{N}$$

som idet $H_S = 1,60 \bar{H}$ (jf. fig. 5.2-5) omskrives til

$$H_S = \frac{1,42}{\sqrt{\ln \frac{N}{1,5}}} H_2 \quad (5.2-4)$$

Anvendelse af frekvens- og fordelingsfunktioner er en metode til at koncentrere de informationer, som ligger i amplitudesignalet, der i sig

selv er uoverskueligt. Ved sammentrækningen mistes imidlertid information forstået på den måde, at frekvens- og fordelingsfunktioner for bølgehøjder ikke indeholder information om bølgeperioderne. Omvendt vil de tilsvarende funktioner for bølgeperioder ikke rumme information om bølgehøjderne.

Betragter man alene bølgeperioderne kan man ud fra definitionen på fig. 5.2-2 foretage en statistisk bearbejdning og derved finde følgende empiriske sammenhæng, se [1].

$$\begin{aligned} T_S &\approx 1,24 \bar{T} \\ T_{\max} &\approx 1,42 \bar{T} \end{aligned} \quad (5.2-5)$$

hvor \bar{T} er middelperioden, T_S er den signifikante periode, dvs. middelperioden af den trediedel af bølgerne med de største perioder og T_{\max} er den periode, som kun overgås af 1% af perioderne.

Sammenhængen imellem perioden svarende til den signifikante bølgehøjde H_S og ovennævnte bølgeperioder er fundet til

$$T_{H_S} \approx 1,1 \bar{T} \approx 0,89 T_S \quad (5.2-6)$$

hvor T_{H_S} er middelperioden af de bølger, som bestemmer H_S , dvs. den højeste trediedel af bølgerne.

Sammenlignes (5.2-5) med fig. 5.2-5 ses det, at bølgeperioden varierer betydeligt mindre end bølgehøjden.

Da både bølgehøjde og bølgeperiode er af betydning for bølgers påvirkning af såvel faste konstruktioner som flydende legemer er oplysning om sammenhængen imellem bølgehøjde og bølgeperiode vigtig.

Imidlertid viser det sig, at for den enkelte bølge er korrelation imellem højde og periode ikke særlig god.

Sammenholdes derimod for en bestemt lokalitet og vindretningssektor karakteristiske værdier af højde og periode (f.eks. H_S og \bar{T}) finder man en bedre korrelation. Som eksempel er på fig. 5.2-7 plottet sammenhængen imellem H_S og \bar{T} for en række bølgemålinger hver af ca. 20 min. varighed, foretaget på 10 meters vanddybde i Storebælt syd for Kerteminde.

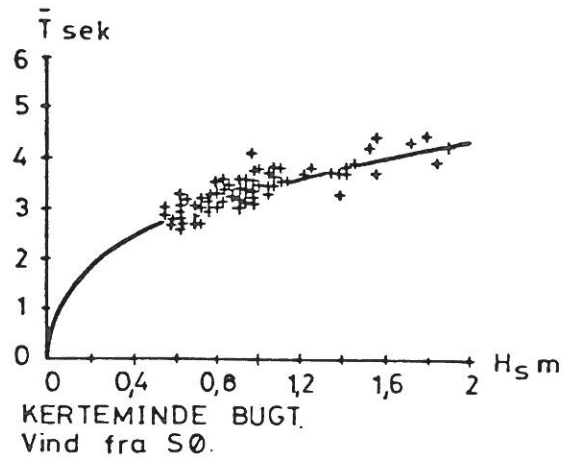


fig. 5.2-7 Eksempel på korrelation imellem H_S og \bar{T}

Et andet eksempel på sammenhæng imellem H_S og T er vist på fig. 5.2-8, hvor de anførte tal i diagrammet angiver antal observationer i %. Observationerne stammer fra Middelhavet og repræsenterer alle vindretninger og stærkt varierende bølgeforhold, herunder også udprægede dønningssituationer. Det ses, at korrelationen under sådanne usorterede forhold ikke er ret god.

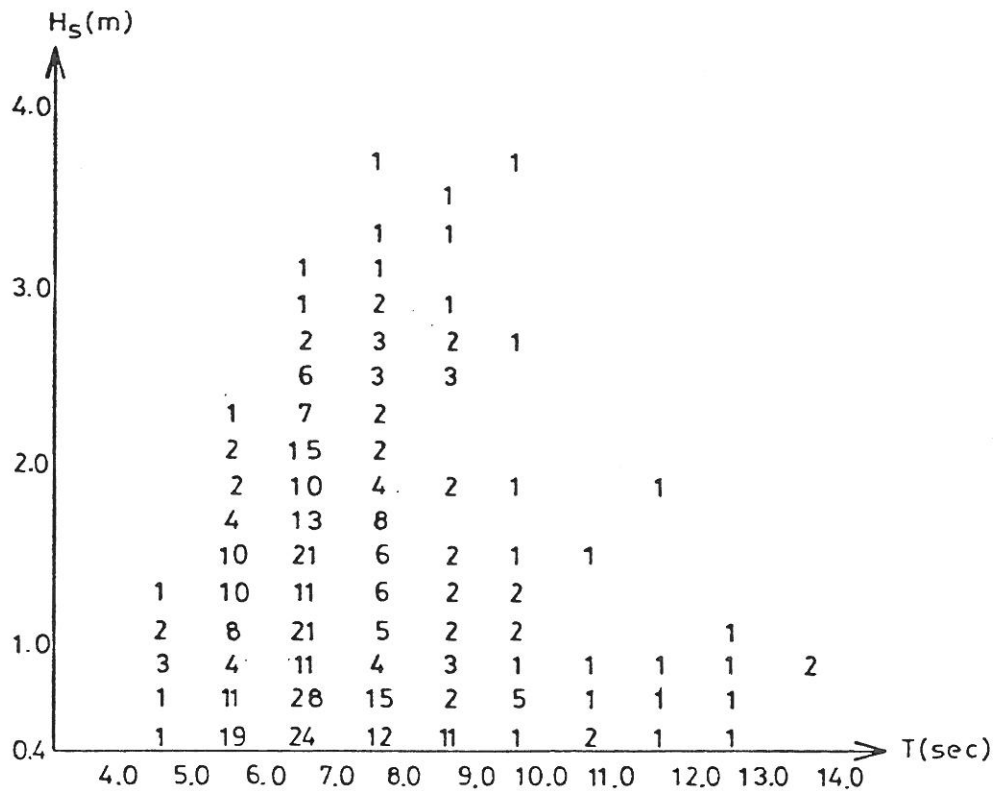


fig. 5.2-8 Eksempel på korrelation imellem H_S og \bar{T}

Omtrentlige værdier af bølgelængden på dybt vand, L_0 bestemmes ud fra bølgeperioden ved hjælp af (4.1-10)

$$L_0 = \frac{g T^2}{2\pi}$$

Tilsvarende bestemmes bølgelængden på lavt vand som beskrevet i afsnit 4.8.

Den anden metode til at analysere bølgeamplitudesignalet med henblik på en koncentration af information er som tidligere nævnt baseret på, at amplitudesignalet opfattes som summen af uendelig mange sinus- og cosinusformede bølger. Ved Fourier analyse (spektral eller harmonisk analyse), som iøvrigt ikke skal gennemgås her, dekomponeres et amplitudesignal $\eta(t)$ af længden (varigheden) T_p i komponenter af typen (idet bølgen registreres et bestemt sted, fx $x = 0$):

$$\eta_i = b_i \cos(\omega_i t) + c_i \sin(\omega_i t)$$

hvor $\omega_i = i \frac{2\pi}{T_p} = 2\pi f_i$

Sædvanligvis omskrives udtrykket til

$$\eta_i = a_i \cos(\omega_i t - \delta_i) \quad (5.2-7)$$

hvor

$$a_i = \sqrt{b_i^2 + c_i^2} \quad \text{og} \quad \delta_i = \tan^{-1} \frac{c_i}{b_i}$$

Fasen δ_i negligeres i reglen, hvorved information om amplitudesignalets virkelige form forsvinder. En rekonstruktion af amplitudesignalet er derefter ikke mulig.

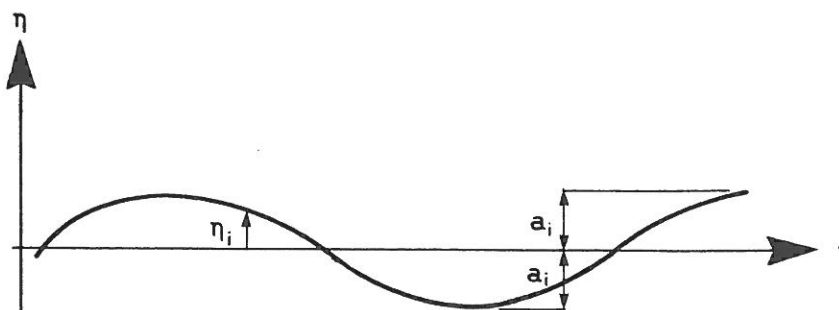


fig. 5.2-9 Komponent af bølgeamplitudesignalet

Idet energien pr. horizontal arealenhed af en sinus- eller cosinusbølge er, jf. (4.5-1)

$$\frac{1}{2} \rho g a_i^2, \quad (5.2-8)$$

kan der efter beregning af energien for hver af komponenterne optegnes et diskret bølgeenergispektrum som vist på fig. 5.2-10

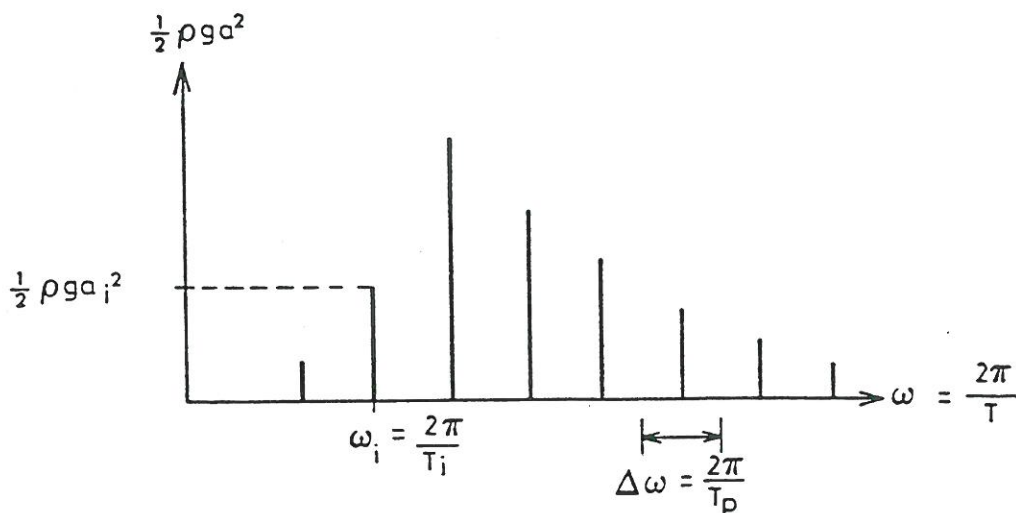


fig. 5.2-10 Diskret bølgeenergispektrum

Frekvensspringet imellem de diskrete værdier er ved Fourieranalysen fastlåst til $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_p}$, hvor T_p er varigheden (længden) af amplitudesignalet. Laveste frekvens er $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}$, næstlaveste er $\omega_2 = 2\frac{2\pi}{T_p}$, osv.

Idet variansen af en hel sinus- eller cosinusbølge med amplituden a_i er $\frac{1}{2}a_i^2$ kan det diskrete variansspektrum findes af det tilsvarende bølgeenergispektrum ved at dividere med ρg .

Når amplitudesignallængden $T_p \Rightarrow \infty$, går det diskrete spektrum mod et kontinuert spektrum, idet frekvensspringet $\Delta\omega \Rightarrow 0$. Samtidig går imidlertid variansen (eller energien) for de enkelte frekvenser mod nul, hvorfor man som ordinat afbilleder varianstætheden $S(\omega)$, som har dimensionen $m^2 \cdot s$. Dette illustreres i fig. 5.2-11, der anskueliggør dels dannelsen af varianstæthedsspektret i form af en trappekurve ud fra det diskrete variansspektrum dels overgangen til det kontinuerte variansspektrum.

Amplitudesignalets totale varians er

$$\text{Var}[\eta(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_i^2 \quad (5.2-9)$$

som selvsagt er lig med arealet under både trappekurven og den kontinuerte kurve i fig. 5.2-11. Ordinator angiver således varianstætheden, der dog sædvanligvis benævnes spektraltætheden. I litteraturen kaldes variansspektret ofte for energispektret, idet man underforstået ser bort fra ρg .

Selv om de praktiske problemer ved Fourier analysen ikke behandles her, skal der gøres opmærksom på, at bestemmelsen af Fourierkonstanterne og dermed varianserne $\frac{1}{2}a_i^2$ er behæftet med stor usikkerhed forstået på den måde, at man selv for store T_p 'er får store variationer i a_i^2 inden for selv et snævert frekvensinterval, blot T_p ændres lidt. I praksis anvendes derfor forskellige midlingsteknikker for at øge pålideligheden af variansestimaterne.

Spektrrets form og lokalisering på ω -aksen kan beskrives ud fra momenterne. Det n 'te moment defineres som

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad (5.2-10)$$

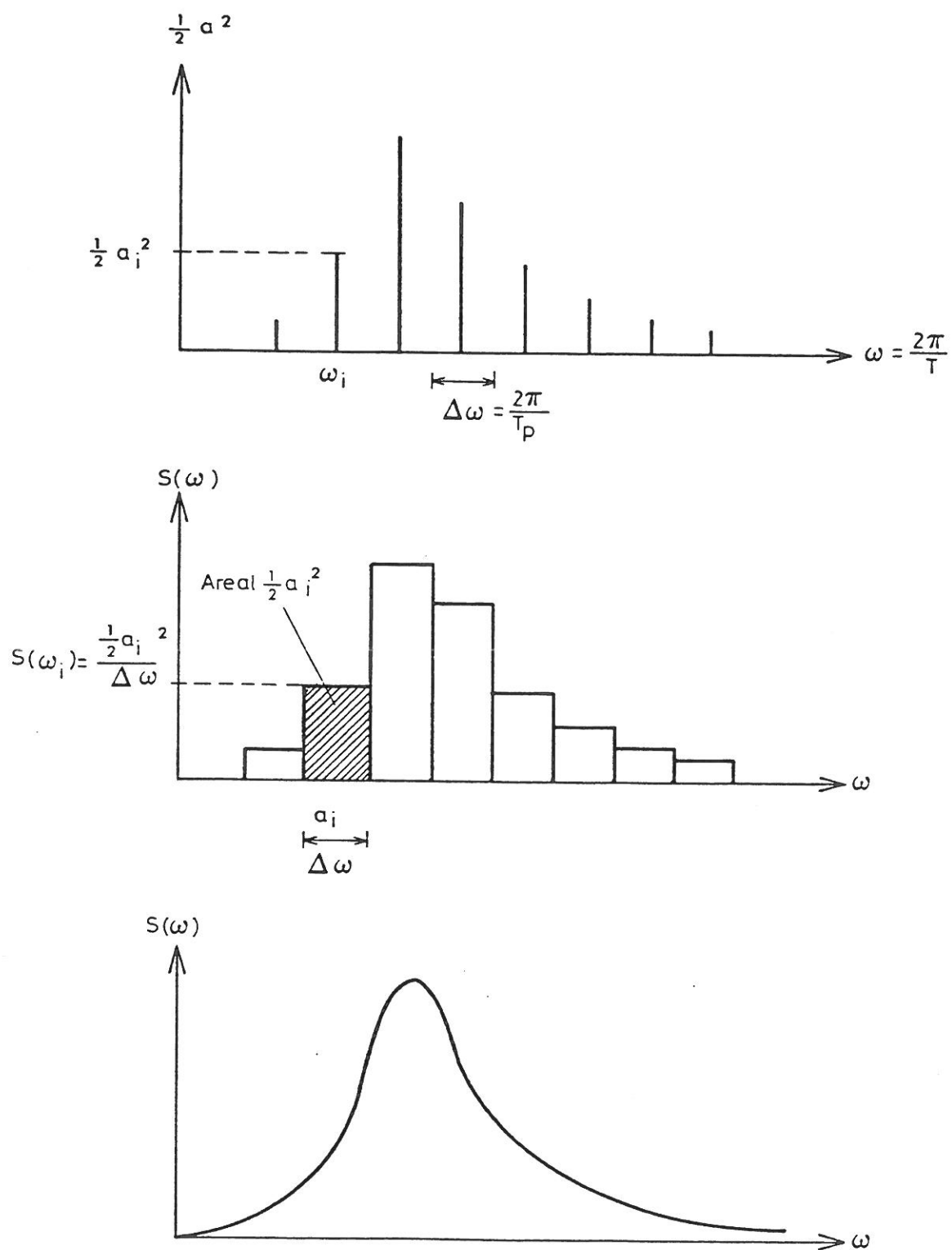


fig. 5.2-11 Variansspektret

Det ses, at det nulte moment m_0 er lig med arealet, som igen er lig med amplitudesignalets totale varians.

For voksende n vægtes den højfrekvente del af spektret. Parametre indeholdende momenter af forskellig orden kan derfor bruges til angivelse af hovedformer ved spektret. For eksempel kan et mål for spektrets bredde udtrykkes ved den såkaldte spektralbreddeparameter ϵ , der defineres som

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (5.2-11)$$

$\epsilon = 0$ og $\epsilon = 1$ svarer til henholdsvis et smalt og et bredt spektrum som anskueliggjort i fig. 5.2-12.

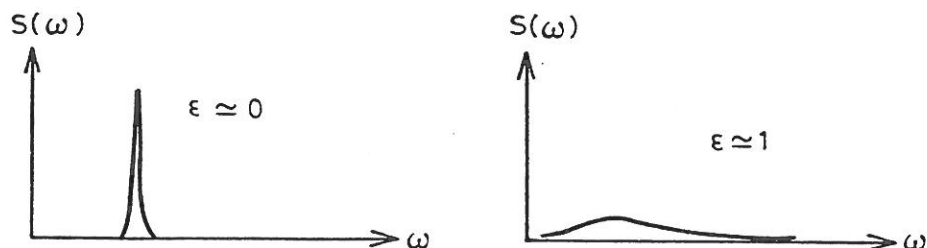


fig. 5.2-12. Spektralbreddeparameteren ϵ

Variansspektret alene giver ikke umiddelbart information om bølgehøjder og deres hyppighed. For at nå frem til denne vigtige information må bølgehøjdefordelingen kendes. Som ovenfor anført kan man ved deterministisk analyse af amplitudesignalet rent empirisk konstatere, at bølgehøjdefordelingen for stormbølger under stationære forhold følger Rayleigh-fordelingen. Imidlertid kan man også under visse forudsætninger rent teoretisk beregne bølgehøjdefordelingen.

Forudsættes det således, at amplitudesignalet $\eta(t)$ kan betragtes som en stationær, normalfordelt, tilfældig proces, der kan dannes ved en uendelig sum af sinus- og cosinusbølger med tilfældig fordelte faser, så kan frekvensfunktionen for amplitudesignalets lokale maxima x (se fig. 5.2-13) som angivet af Cartwright og Longuet-Higgins findes til

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\epsilon \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\epsilon^2}\right) + \xi \sqrt{1 - \epsilon^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right) \int_{-\infty}^{\frac{1}{\epsilon} \sqrt{\xi(1-\epsilon^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx \right], \quad (5.2-12)$$

hvor $\xi = \frac{x}{\sqrt{m_0}}$. Her er m_0 som før omtalt arealet under variansspektret.

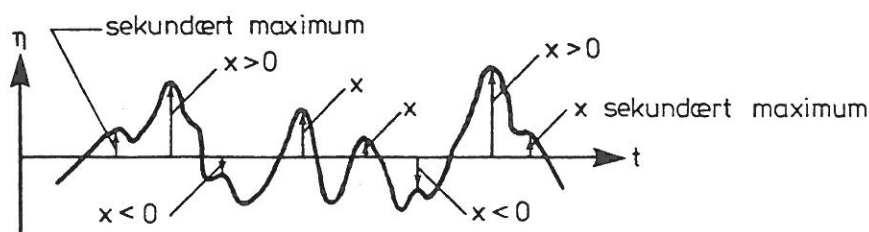


fig. 5.2-13 Definition af amplitudesignalets maximalværdier

Sættes $\epsilon = 0$ svarende til et meget smalt spektrum findes

$$f(\xi) = \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad (5.2-13)$$

som er Rayleigh-fordelingen.

Sættes $\epsilon = 1$ svarende til et bredt spektrum fås

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad (5.2-14)$$

som er normal fordelingen med middelværdi 0.

For stormbølger, dvs. bølger i vækst under vindpåvirkning findes ofte spektralbredden $\epsilon = 0,4-0,5$, hvilke værdier repræsenterer et smalt spektrum. Det viser sig, at Rayleigh-fordelingen, som teoretisk ganske vist forudsætter $\epsilon = 0$, er en god og lidt konservativ tilnærmelse for sådanne bølger, idet den giver bølgehøjder, der for en given sandsynlighed kun er en anelse for store. Dette på trods af at de for den teoretiske udledning gjorde forudsætninger ikke svarer til virkeligheden. Blandt andet bemærkes, at forudsætningen om at vandspejlsvariationen er normalfordelt og sammensættelig af sinus- og cosinusbølger (lineær bølgeteori) ikke svarer til vindpåvirkede bølger, som er usymmetriske med relativt korte, stejle toppe og lange flade bølgedale.

Udskiftes ζ med $x = \zeta\sqrt{m_0}$ i (5.2-13) fås idet sandsynlighedsniveauet ikke må ændres ved substitutionen, dvs. $f(\zeta)d\zeta = f(x)dx$,

$$f(x) = \frac{x}{m_0} e^{-\frac{x^2}{2m_0}}$$

Forudsættes lineær bølgeteori og $\epsilon = 0$ (meget få negative og sekundære positive lokale maxima) vil $H = 2x$, hvorved frekvensfunktionen for bølgehøjder bliver

$$f(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}} \quad (5.2-15)$$

Den tilhørende fordelingsfunktion bliver

$$F(H') = P\{H < H'\} = \int_0^{H'} f(H) dH = 1 - e^{-\frac{H'^2}{8m_0}} \quad (5.2-16)$$

Bølgehøjdefordelingen kan således beregnes, når variansspektrrets areal m_0 er kendt. De meget anvendte karakteristiske bølgehøjder som f.eks. middelbølgehøjden \bar{H} , den signifikante bølgehøjde H_S og "maximalbølgehøjden" H_{\max} findes som følger:

$$\bar{H} = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\int_0^\infty H f(H) dH}{\int_0^\infty f(H) dH} = \int_0^\infty H f(H) dH, \quad (5.2-17)$$

idet nævneren jo er 1. \bar{H} er derfor lig med førsteordensmomentet af frekvensfunktionen.

Indføres (5.2-15) kan middelbølgehøjden beregnes til, $\bar{H} = \sqrt{2\pi} \sqrt{m_0} = 2,51\sqrt{m_0}$.

Den signifikante bølgehøjde findes af:

$$H_S = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} H f(H) dH}{\int_{\alpha}^{\infty} f(H) dH} \quad (5.2-18)$$

hvor α bestemmes af $\int_{\alpha}^{\infty} f(H) dH = \frac{1}{3}$, jf. fig. 5.2-14.

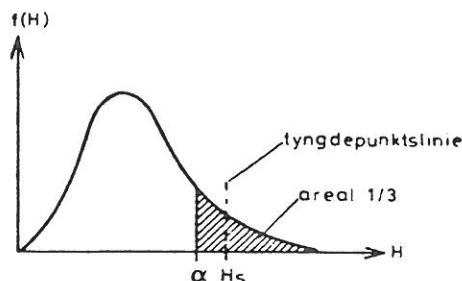


fig. 5.2-14 Definition af signifikant bølgehøjde

Indføres (5.2-15) kan den signifikante bølgehøjde beregnes til $H_S = 4,004\sqrt{m_0}$.

H_{\max} defineres her som bølgehøjden, der kun overskrides af 1% af bølgerne eller med andre ord som bølgehøjden, der kun overskrides med sandsynligheden 1%. Af (5.2-16) findes overskridelsessandsynligheden

$$Q = P\{H > H'\} = 1 - F(H') = e^{-\frac{H'^2}{8m_0}} \quad (5.2-19)$$

$$\ln Q = -\frac{H'^2}{8m_0}$$

$$H' = \sqrt{8m_0 \ln \frac{1}{Q}}$$

Indsættes $Q = 1\%$ findes $H_{\max} = 7,43\sqrt{m_0}$

De indbyrdes forhold imellem de her fundne karakteristiske bølgehøjder er selvsagt identiske med det på fig. 5.2-5 anskueliggjorte.

Bølgeperioden kan også estimeres ud fra variansspektrets momenter.

Middelværdien, $\bar{\omega}$ af den cykliske frekvens er bestemt ved

$$\bar{\omega} = \frac{m_0}{m_1}$$

hvor m_1 og m_0 defineres ud fra (5.2-10).

Middelnulkrydsningsperioden, \bar{T} kan estimeres, idet følgende tilnærmelse regnes gældende $\bar{T} \simeq \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$, dvs.

$$\bar{T} \simeq 2\pi m_0/m_1 \simeq 2\pi\sqrt{m_0/m_2} \quad (5.2-20)$$

Anvendes frekvensen $f = T^{-1}$ i stedet for T er estimatet på middelværdien

$$\bar{f} \simeq \frac{m_0}{m_1}$$

hvor momenterne beregnes af $m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df$. I øvrigt gælder $m_n(f) = (2\pi)^{-n} m_n(\omega)$.

T_S , T_{H_S} og T_{\max} kan herefter estimeres ud fra de tidligere angivne sammenhænge.

Variansspektret og dermed m_0 kan som før omtalt bestemmes ved en spektral-analyse af bølgeamplitudesignalet. For mange lokaliteter eksisterer der imidlertid ingen eller kun utilstrækkelige bølgemålinger, hvorfor man må ty til anvendelse af mere eller mindre empiriske spektre. Fælles for disse er, at en bestemmelse af spektret kan foretages ud fra kendskab til vindhastigheden. For visse bølgesituationers vedkommende kræves dog kendskab både til vindhastigheden U og længden af det frie stræk F , hvor sidstnævnte er den strækning hvorover bølgerne er påvirkede af vinden.

I stedet for parametrene U og F kan indføres en karakteristisk bølgehøjde og en karakteristisk bølgeperiode som f.eks. H_S og \bar{T} . Disse kan skønsmæssigt bestemmes ved hjælp af de såkaldte frit-stræk diagrammer, der på grundlag af empiriske data angiver sammenhængen imellem U , F , H og T .

I det følgende omtales to spektre, der repræsenterer to typiske men principielt forskellige bølgetilstande.

Det bemærkes, at der i den foregående omtale af spektre og momenter er anvendt den cykliske frekvens, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. I nedenstående formler for empiriske spektre er udelukkende anvendt frekvensen, $f = \frac{1}{T}$.

For dybtvandsbølger, der har nået en ligevægtstilstand hvor energitilførsel svarer til energitab, har W.J. Pierson og L. Moskowitz foreslået følgende spektrum

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp(-0,74 (\frac{f_0}{f})^4) \quad , \quad (5.2-21)$$

hvor f er frekvensen, g er tyngdeaccelerationen, $\alpha = 0,0081$, $f_0 = g(2\pi U_{19,5})^{-1}$ og $U_{19,5}$ er vindhastigheden 19,5 m over middelvandspejlsniveau.

Spektret, der benævnes Pierson-Moskowitz spektret (eller kort PM spektret), er delvis teoretisk begrundet, men iøvrigt tilpasset et stort antal bølgemålinger. Det er vigtigt at understrege, at PM spektret kun er brugeligt, hvor det frie stræk, hvorover bølgerne dannes, er så langt, at ovennævnte energibalance er nået.

I stedet for vindhastighedsparameteren $U_{19,5}$ kan i (5.2-21) indføres en karakteristisk bølgehøjde og en karakteristisk bølgeperiode. Antages bølgehøjderne Rayleigh-fordelte og indføres de tidligere omtalte estimater $H_S = 4\sqrt{m_0}$ og $\bar{T} = m_0/m_1$ kan PM spektret skrives som

$$S(f) = 0,11 \frac{H_S^2}{\bar{T}^4} f^{-5} \exp(-0,44 (\bar{T} f)^{-4}) \quad . \quad (5.2-22)$$

Spidsfrekvensen, f_m , dvs. frekvensen, hvor spektraltætheden er størst, er for PM spektret $f_m = 0,0639\sqrt{g/H_S}$. Tilnærmet kan findes $f_m \approx 0,7 \bar{T}^{-1}$.

Generelt kan (5.2-21) og (5.2-22) skrives på formen

$$S(f) = A f^{-5} \exp(-B f^{-4}) \quad , \quad (5.2-23)$$

hvor A og B er uafhængige af f . I tidens løb er foreslået flere spektre af denne analytiske form og de siges alle at tilhøre klassen af PM spektre.

Fig. 5.2-15 viser et eksempel på et PM spektrum svarende til en vindstyrke på 13 m/sec.

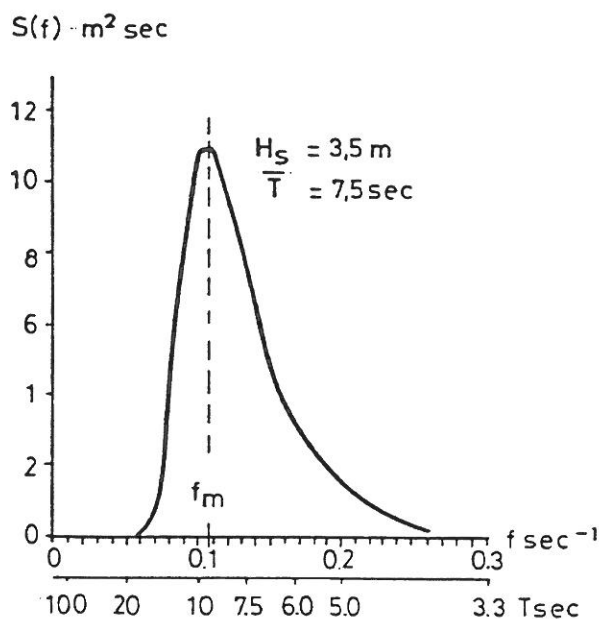


fig. 5.2-15 Eksempel på Pierson-Moskowitz spektrum

Det andet spektrum, som skal omtales her, svarer til tilstande, hvor bølgehøjden er begrænset af længden af det frie stræk. Spektret, der benævnes JONSWAP-spektret, stammer fra The Joint North Sea Wave Project, som i 1967 blev startet af laboratorier i Vesttyskland, Holland, England og U.S.A. bl.a. med det formål at studere opvoksen af bølger. Samtidige målinger af bølger og vind blev foretaget i en række stationer placeret langs en linie fra øen Sylt og 160 km mod vest.

Et typisk resultat af målingerne fremgår af fig. 5.2-16 der viser spektrene fra en række af stationerne svarende til en næsten konstant østlig vind over hele måleområdet.

Det fremgår, at både spektraltæthedens maximalværdi og spidsfrekvensen afhænger af det frie stræks længde. Figuren viser også det såkaldte "overshoot", hvor spektraltætheden (energien) på en given frekvens kan være væsentlig større under bølgeopvoksen end under fuldt udviklede bølgeforhold.

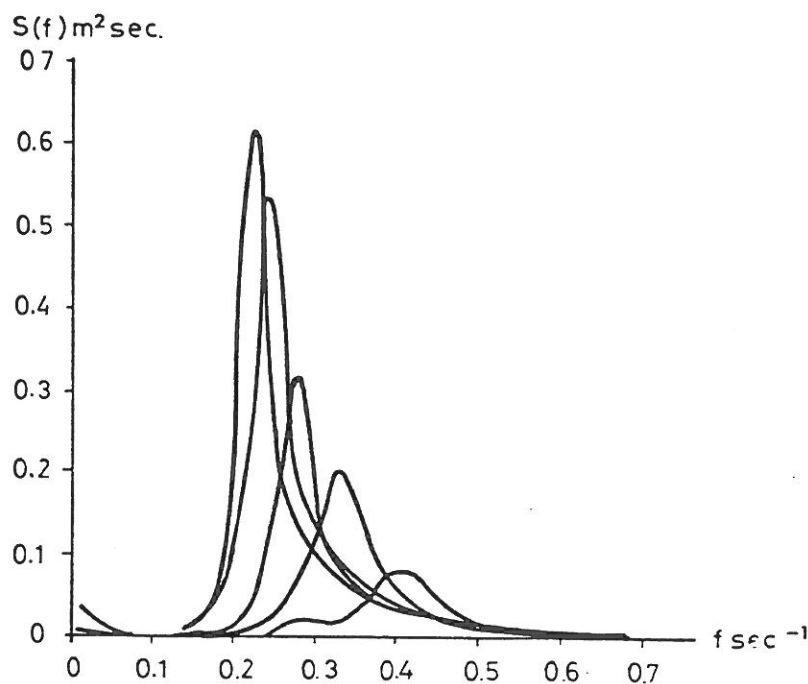


fig. 5.2-16 Frit-stræk begrænsede spektra fra JONSWAP-projektet

JONSWAP-spektret (eller blot J-spektret) er givet ved (se [6])

$$s(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_m}\right)^{-4}\right) \cdot \gamma \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{f}{f_m} - 1\right)^2\right) \quad (5.2-24)$$

hvor $\alpha = 0,076 x^{-0,22}$

$x = gFU_{10}^{-2}$ (F er længden af det frie stræk, U_{10} er vindhastigheden 10 m over middelvandspejlsniveau)

$f_m = \frac{3,5 g x^{-0,33}}{U_{10}}$ (spidsfrekvensen svarende til maximal spektral-tæthed)

$\gamma = 3,3$ (middelværdi)

$\sigma = \begin{cases} 0,07 & \text{for } f \leq f_m \\ 0,09 & \text{for } f > f_m \end{cases}$

Ved sammenligning med (5.2-21) ses det, at J-spektret er dannet ved at multiplicere udtrykket for PM-spektret med faktoren

$$\gamma \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{f}{f_m} - 1\right)^2\right)$$

J-spektret er mere spidst end PM-spektret med relativt større spektral-tæthed omkring spidsfrekvensen.

Størrelserne α , γ og σ er dimensionsløse parametre, som tilpasses således, at bedst mulig overensstemmelse med målte spektra opnås. Spredningen

kan især på α være stor og de anførte værdier må betragtes som middelværdier.

Det har vist sig, at udtrykket (5.2-24) med det rigtige valg af parametrene α , γ og σ passer godt på frit-stræk begrænsede bølger (bølger under vækst) selv under noget ikke-stationære og inhomogene vindforhold. Stormbølger i Nordsøen og i indre danske farvande er fundet i god overensstemmelse med JONSWAP-spektrret.

Fig. 5.2-17 viser et eksempel på et energispektrum målt på 10 meters vanddybde ud for Risinge syd for Kerteminde. På samme figur er indtegnet et tilpasset JONSWAP-spektrum med angivelse af parameterværdierne α og γ (σ værdierne er som anført i (5.2-24)). Det fremgår, at JONSWAP-spektrret tilnærmer bølgeforholdene på udmærket vis.

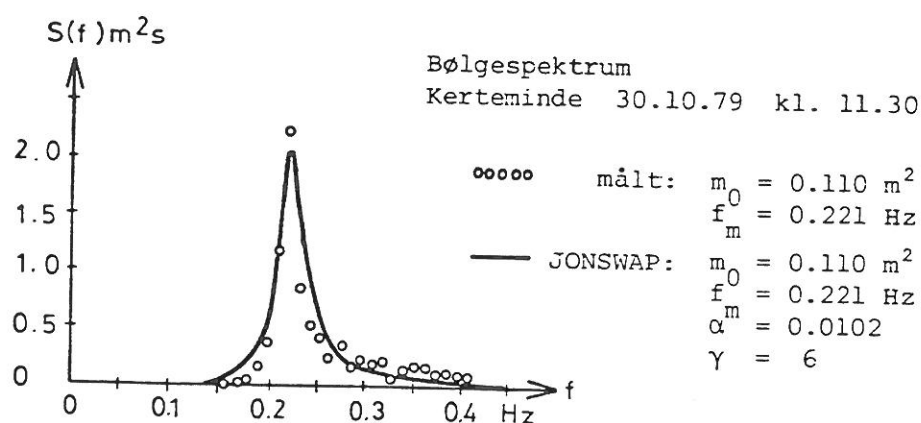


fig. 5.2-17 Eksempel på JONSWAP-spektrum tilpasset målt spektrum

6. Bestemmelse af H_{m0} og T_m på en lokalitet ud fra vinddata

6.1 Dimensionsanalyse og bølgedannelse

Vi forestiller os den idealiserede situation, at vinden blæser med konstant hastighed og retning over et havområde med udstrækningen F . Vinden vil da generere bølger med højde H og periode T for enden af området. Bølgeparametrene må formodes at afhænge af følgende størrelser:

F	(m)	områdets udstrækning ("det frie stræk")
U	(m/s)	vindens hastighed
t	(s)	vindens varighed
d	(m)	vanddybden
ρ_v	(kg/m ³)	vandets massefylde
ρ_L	(kg/m ³)	luftens massefylde
g	(m/s ²)	tyngdeaccelerationen

Ved hjælp af dimensionsanalyse kan afhængigheden omformes til relationer mellem dimensionsløse parametre (se F.A. Engelund: *Hydraulik*, 1978, p 294-297). Da de 9 nævnte størrelser (incl. H og T) indeholder 3 dimensioner (længde, tid og masse) kan sammenhængen reduceres til $9 - 3 = 6$ dimensionsløse størrelser:

$$\frac{gH}{U^2}, \quad \frac{gT}{U}, \quad \frac{gF}{U^2}, \quad \frac{gt}{U}, \quad \frac{gd}{U^2}, \quad \frac{\rho_v}{\rho_L}$$

således at vi kan antage, at

$$\frac{gH}{U^2} = f_1\left(\frac{gF}{U^2}, \frac{gt}{U}, \frac{gd}{U^2}, \frac{\rho_v}{\rho_L}\right)$$

$$\frac{gT}{U} = f_2\left(\frac{gF}{U^2}, \frac{gt}{U}, \frac{gd}{U^2}, \frac{\rho_v}{\rho_L}\right)$$

I praksis kan vi antage, at $\frac{\rho_v}{\rho_L} \sim \text{konstant}$, således at denne størrelse kan slettes af ovenstående sammenhænge. Hvis vanddybden er "stor", dvs. $d > \frac{L}{2}$ (se bølgetabellen), kan bølgerne ikke "mærke" bunden, dvs. for sådanne tilfælde vil $\frac{gd}{U^2}$ ikke indgå.

Man skelner mellem 2 hovedtilfælde for bølgedannelsen. Det frie stræk kaldes begrænsende for bølgedannelsen, hvis vinden har blæst tilstrækkelig længe til, at bølgehøjden for enden af området har nået en stationær tilstand. Bølgedannelsen kaldes varigheds-begrænset, hvis bølgehøjden er begrænset af den tid, som vinden har blæst.

6.2 Dybt vand

I tilfælde af, at bølgedannelsen er frit-stræk-begrænset, har man for dybt vand sammenhængen

$$\frac{gH}{U^2} = f_3\left(\frac{gF}{U^2}\right)$$

På grundlag af feltdata har man fundet sammenhængen (SPM, 1984)

$$\frac{gH_{m0}}{U_A^2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{gF}{U_A^2}\right)^{1/2}$$

U_A er en korrigeret vindhastighed (engelsk: wind-stress-factor)

$$U_A = 0,71 U^{1,23}$$

hvor U er vindhastigheden målt i 10 m højde. Man kan af ovenstående se, at

$$U_A^2 \sim H_{m0}^2 \sim m_0 \quad [\text{læses: prop. med}]$$

altså at U_A^2 er proportional med bølgenes energi.

Tilsvarende fås

$$\frac{gT_m}{U_A} = 2,857 \cdot 10^{-1} \left(\frac{gF}{U_A^2}\right)^{1/3}$$

hvor T_m er perioden svarende til den største spektraltæthed.

Den nødvendige varighed t , som vinden skal blæse for at der er tale om frit-stræk begrænset bølgedannelse, kan bestemmes af

$$\frac{gt}{U_A} \sim 68,8 \left(\frac{gF}{U_A^2}\right)^{2/3}$$

Traditionelt har man benyttet diagrammer til bestemmelse af bølge-højde og -periode, se fig. 6.2.1. Diagrammet benyttes på den måde, at man går "vandret" ind svarende til den aktuelle korrigerede vindhastighed til skæring med en "lodret" linie svarende til det aktuelle frie stræk. Herefter kan man umiddelbart aflæse bølgehøjde, bølgeperiode og den nødvendige varighed af vinden (hvis vinden rent fak-

tisk blæser længere tid end det aflæste, er bølgedannelsen altså frit-stræk begrænset). Det bemærkes, at diagrammet svarer til "dybt" vand. Af diagrammet kan ses, at der er en maksimal bølgehøjde for en given vindhastighed, således at ovenstående formler ikke bør anvendes ukritisk.

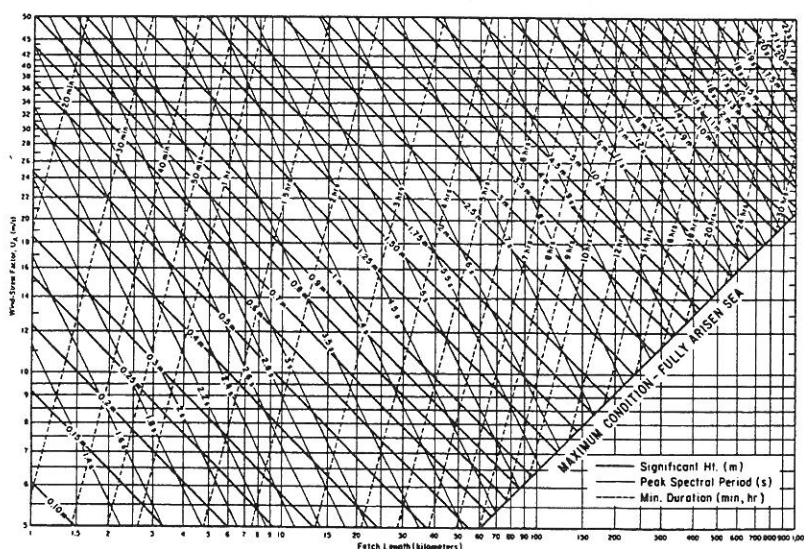


Fig. 6.2.1 Bølgeparametre på dybt vand som funktion af korrigeret vindhastighed og frit stræk.

6.3 Vanddybde $d < \frac{L}{2}$

For de tilfælde, hvor bølgedannelsen foregår på lavt vand, kan anvendes følgende formler (SPM 1984):

$$\frac{gH}{U_A^2} = 0.283 \tanh \left[0.530 \left(\frac{gd}{U_A^2} \right)^{3/4} \right] \tanh \left\{ \frac{0.00565 \left(\frac{gF}{U_A^2} \right)^{1/2}}{\tanh \left[0.530 \left(\frac{gd}{U_A^2} \right)^{3/4} \right]} \right\}$$

$$\frac{gT}{U_A} = 7.54 \tanh \left[0.833 \left(\frac{gd}{U_A^2} \right)^{3/8} \right] \tanh \left\{ \frac{0.0379 \left(\frac{gF}{U_A^2} \right)^{1/3}}{\tanh \left[0.833 \left(\frac{gd}{U_A^2} \right)^{3/8} \right]} \right\}$$

$$\frac{gt}{U_A} = 5.37 \cdot 10^2 \left(\frac{gT}{U_A} \right)^{7/3}$$

Der kan anvendes følgende vejledende størrelser for maksimale lavtvandsbølger ved bundhældninger 1:50 - 1:100

$$H_s \approx 0.5 - 0.6 d$$

$$H_{1\%} \approx 0.8 - 1.0 d$$

Højderne er stigende med bundhældningen.

6.4 Vindhastigheden

De anførte formler forudsætter, at vinden indsættes svarende til 10 m over terræn. I praksis er målinger ofte foretaget i en anden højde. Hvis vinden er målt i højden z , kan vindhastigheden U_{10} i 10 m højde med rimelig nøjagtighed bestemmes af

$$U_{10} = U_z \left(\frac{10}{z} \right)^{1/7}$$

forudsat, at z er mindre end ca. 20 m.

Beauforts skala

Vindstyrke efter Beauforts skala	Vindhastigheder 10 m over terrænet		Betegnelse	Vindens virkning
	m/sek	knob		
0	0.0- 0.2	<1	Stille	Røg stiger lodret op.
1	0.3- 1.5	1-3	Svag luftning	Røgens drift viser netop vindens retning
2	1.6- 3.3	4-6	Svag	Bladene på fritstående træer bevæger sig, en vimpel løftes, vinden føles i ansigtet.
3	3.4- 5.4	7-10	Let brise eller vind	Blade og små kviste på træerne bevæger sig, lette flag og vimpler strækkes.
4	5.5- 7.9	11-15	Jævn	Støv og løse papirer løftes, kviste og mindre grene bevæger sig, større flag og vimpler strækkes.
5	8.0-10.7	16-21	Frisk	Små løvtræer begynder at svaje, toppede småbølger viser sig på damme og søer.
6	10.8-13.8	22-27	Kuling ell. blæst	Store grene og mindre træstammer bevæger sig, det synger i telefontrådene; man mærker tydeligt vindens modstand, når man går mod den.
7	13.9-17.1	28-33	Stiv kuling ell. blæst	Større træer bevæger sig, trættende at gå mod vinden.
8	17.2-20.7	34-40	Hård kuling ell. blæst	Kviste og grene brækkes af træerne; besværligt at gå mod vinden.
9	20.8-24.4	41-47	Storm	Træstammer bevæges stærkt, store grene kan knækkes af træerne, tagsten kan blæse ned; man standser ofte, når man går mod vinden, besværligt at stå stille.
10	24.5-28.4	48-55	Stærk storm	(Sjældent i indlandet); træstammer kan knækkes, tage blæse ned; man kan ikke stå uden af og til at måtte flytte benene.
11	28.5-32.6	56-63	Orkanagtig storm	(Forekommer meget sjældent); talrige ødelæggende virkninger, træer rives op med rode. For at stå må man holde sig fast eller uafbrudt bevæge benene.
12	over 32.6	64-	Orkan	(Forekommer overordentlig sjældent); voldsomme ødelæggende virkninger.

7. Litteratur

- [1] Wiegel, R.L.: "Oceanographical Engineering"
Prentice-Hall Inc., New York 1964.
- [2] U S Army Coastal Engineering Research Center:
"Shore Protection Manual", Vol. I + II, 1984.
- [3] Ippen, A: "Estuary and Coastline Hydrodynamics"
McGraw-Hill Inc., New York 1966.
- [4] Kinsman, B.: "Wind Waves"
Prentice-Hall Inc., 1965.
- [5] Svendsen, I.A. and Jonsson, J.G.:
"Hydrodynamics of Coastal Regions"
Den Private Ingeniørfond. Technical University of Denmark, 1980.
- [6] Humb, O.G. and Overvik, T:
"Parameterization of wave spectra and long term
joint distribution of wave height and period"
Proc. Boss '76, Vol. I.
- [7] Institutt for Havnebygging; Universitetet i Trondheim:
"Bølger på dypt og grunt vann", NTH.

Tidsskrifter, hvori bølgeproblemer omtales:

"Journal of Hydraulics Division"
Proc. of the American Society of Civil Engineers.

"Journal of the Waterways and Harbors Division"
Proc. of the American Society of Civil Engineers.

